estudios

La didáctica matemática a lo largo de los ciclos medios (*)

CICLO METODOLÓGICO. PENETRACIÓN CONSCIENTE EN EL MÉTODO DEDUCTIVO.

Alcanzado que sea por el alumno un cierto grado de madurez mental, y acumulada suficiente experiencia deductiva a través de las cadenas que el estudio de la matemática le habrá ido ofreciendo a lo largo de cuatro o cinco cursos de Bachillerato, es llegado el momento de darle una idea de cómo se prolonga estas cadenas en ambos sentidos y de cómo se enlazan hasta constituir la red multipolar de proposiciones características de toda ciencia deductiva.

Pero el modo más eficaz de que el alumno penetre en este tejido no es precisamente presentándoselo ya elaborado, sino invitándole a su elaboración. Fue un grave error creer que el tránsito del método intuitivo al racional podía efectuarse de manera brusca sometiendo, en un momento dado, *todos* los conocimientos elementales intuitivamente adquiridos por el niño a una revisión racional que partiese nuevamente de la nada para reelaborarlos, según nuevos cuadros rígidos formados por los clásicos axiomas, teoremas, corolarios... En este error incurrieron los programas italianos hace ya bastantes años, como consecuencia del movimiento revisionista de los fundamentos de la matemática de comienzos de siglo; y en el mismo error incurrió el plan español de 1934 al introducir el método racional en tercer curso para reexponer en forma deductiva el contenido de los dos primeros cursos desarrollados según método intuitivo. El niño no mostraba ningún interés por esta repetición que le aburría soberanamente. No podía sentir tal interés, puesto que el prurito reductivo de unas verdades a otras ni se presenta espontáneo a esta edad, ni el alumno tiene vocación reflexiva suficiente para que sea posible despertar en él este interés a través de una acción pensante sugeridora. De aquí la conveniencia de que el tránsito de lo intuitivo a lo racional sea gradual e insensible, adoptándolo a la natural evolución del escolar, y que convenga esperar el grado de madurez necesario y la experiencia deductiva suficiente para aflorar en el alumno la conciencia del método lógico reductivo, invitándole a participar activamente en su elaboración.

Esta participación activa no constituye ninguna utopía si no se pretende de ella más de lo que naturalmente puede dar de sí. Se inicia ante el recuerdo de cualquier propiedad y de su deducción, por ejemplo, la del mismo teorema de Pitágoras (el que acumula mayoría de respuestas ante la pregunta: ¿Quién recuerda un teorema?). La sucesión encadenada de "porqués" espolea la actividad deductiva que se establece mediante un vivo diálogo con la clase. Tan pronto unos alumnos como otros van recordando, inventando, y enlazando las implicaciones que se encadenan en las propiedades recordadas, hasta llegar a verdades de carácter trivial a cuyos "porqués" no saben contestar, ya que fueron admitidas en su día como resultado de percepciones o de intuiciones directas. Ejemplos varios de cadenas similares conducen a los mismos puntos iniciales y es interesante procurar que los alumnos dibujen esquemas de enlace (grafos) que hagan bien visible la red de proposiciones que se ha tenido que entretejer para llegar desde tales puntos de partida a los teoremas analizados.

Con frecuencia los muchachos, al llegar a estos puntos de partida y al pretender asimismo deducirlos, se enzarzan en "porqués" que cierran círculos viciosos, cuya inconsistencia acaban descubriendo ellos mismos. Es el momento de justificar la introducción de axiomas y de distinguirlos de los teoremas o proposiciones demostrables o reducibles. El análisis de algunas de ésta permite adquirir consciencia de su estructura, así como de las relaciones lógicas entre teoremas directos, recíprocos, contrarios, contrarrecíprocos, de la condiciones necesarias y suficientes, de los lugares geométricos, de los métodos de reducción al absurdo, de los teoremas compuestos y del principio de reciprocidad...

Tal tejido deductivo se establece no sólo caminando en sentido regresivo hacia las verdades primitivas o axiomas, sino también y muy principalmente en sentido progresivo para el descubrimiento de nuevas verdades con las que se espolea la curiosidad investigadora del muchacho a través de motivos de interés sistemático u ocasional. La analogía, la inducción generalizadora, la inferencia plausible, aportarán nuevas fuentes estimulantes a la metodología, ofreciendo verdades presentidas al refrendo deductivo, cuya apetencia aumentará así progresivamente. Aun cuando parezca paradógico, los modelos, las filminas, los films, o simplemente el material didáctico matemático que puede sugerir la misma vida, pueden contribuir poderosamente a la creación de este clima de interés deductivo en la edad propicia.

Toda esta participación activa del alumnado en la elaboración metodológica de la ciencia matemática a su nivel no puede ser objeto de impaciencias ni de precipitaciones que fuercen el ritmo natural de alumbramiento y satisfacción de los primeros deseos e intentos deductivos del muchacho. Si los principios son lentos, los avantes ulteriores son recuperadores e incluso a veces sorprendentes. La experiencia metodológica realizada en el curso 1957-58 en el Instituto de San Isidro con alumnos de quinto curso se prolongó durante más de un trimestre de clase alterna. La elaboración de nuevas proposiciones a partir de la

(*) La primera parte de este trabajo se publicó en el número 95 (2.ª quincena marzo 1959), págs. 57-61.

semejanza y del teorema de Pitágoras permitió recorrer de nuevo, con regusto de nuevos detalles de originalidad deductiva, buen número de propiedades ya conocidas de los alumnos (teorema de Pitágoras generalizado, lugares de puntos cuya suma y cuya diferencia cuadrados de distancias a dos puntos fijos es constante, potencia, eje y centro radicales) hasta descubrir nuevos lugares geométricos y abordar temas que rozaron ya la matemática moderna: grupos de movimientos, áreas orientadas, conceptos de grupo, cuerpo y anillo, etc. El grupo de las traslaciones en el plano y el que forman los giros y homotecias con el mismo centro me permitieron establecer una doble conexión operativa entre vectores planos, con lo que manejaron sin dificultad alguna el campo complejo. Supuesto admitido el número real, los vectores y los números complejos que representan resultan así mucho más asequibles que la propia génesis del número irracional (que en los ciclos elementales sólo pudo rozarse de pasada) y del que nos ocupamos en el ciclo medio superior.

La prolongada experiencia referida me confirmó una vez más en la idea, defendida con anterioridad en otras ocasiones ante la superioridad y ante mis compañeros de docencia, de que para la penetración consciente en la esencia del método racional o deductivo no se hace necesaria la revisión total del bagaje matemático que el alumno ha adquirido por vía intuitiva. Basta la adquisición consciente de la *calidad* racional a través de la actividad deductiva mencionada, y, si se quiere, del desarrollo lógico sistemático de algún capítulo de la matemática, que permita redondear el concepto de ciencia deductiva como tejido de proposiciones demostrables a partir de ciertas proposiciones iniciales simplemente admitidas, y elaboración de conceptos complejos a partir de conceptos simples indefinibles, enunciados tan sólo como expresión de percepciones idealizadas.

La precisión de lenguaje inherente al método lógico ha de adquirirse asimismo a través de un proceso que haga sentir al mismo alumno su necesidad, y el modo más natural de conseguirlo es fomentar el intercambio de ideas entre ellos, y el deseo de convencerse mutuamente. Las interpretaciones torcidas que invariablemente sugieren los enunciados imprecisos o incorrectos obligan a la rectificación y a la precisión consciente. En el librito sobre "Didáctica matemática eurística" tantas veces citado propongo varios procedimientos para despertar esta actividad de afinamiento y precisión de lenguaje matemático.

Por cierto, que al explorar el grado de penetración consciente con que los alumnos calaban en las estructuras demostrativas durante la experiencia citada registré algunas respuestas que, por lo sorprendentes, considero de interés consignar aquí. Después de efectuado por un alumno el razonamiento que prueba la existencia del centro radical de tres circunferencias, como punto de concurso obligado de los tres ejes radicales resultantes de asociarlas dos a dos, se me ocurrió formular a toda la clase la pregunta: ¿Recordáis alguna otra propiedad que guarde alguna analogía o que se demuestre de manera análoga? Y cuando yo esperaba la alusión a alguno de los puntos notables de un triángulo (circuncentro, baricentro...) dos alumnos formularon (independientemente) respuestas aparentemente desconcertantes. Uno de ellos se refirió al hecho de que "dos segmentos iguales a un tercero son iguales entre sí" y el otro (simultáneamente y sin que influyera, por tanto, su compañero) al hecho similar de que "dos paralelas a una tercera son paralelas entre sí". También hubo varias alusiones a la analogía con el circuncentro; pero considero notabilísimo el hecho de que los aludidos muchachos (por cierto no entre los mejor calificados), saltando por encima de la analogía geométrica que parece más inmediata (concurrencia de tres rectas lugares de análoga propiedad respecto de pares de elementos de una terna), ascendieron a la esencia primera de su fundamento lógico común que es, en efecto, *la propiedad transitiva de la relación de equivalencia* (igualdad de segmentos, igualdad de direcciones, igualdad de potencias...). Ello prueba que el adolescente, y aun el niño, tiene, con frecuencia, más poder de abstracción que el que se le atribuye. La dificultad estriba en traer a un plano consciente dichas abstracciones y sistematizarlas. Y ésta es precisamente la finalidad epistemológica del ciclo de iniciación racional.

LOS CICLOS SUPERIORES. EL NÚMERO REAL Y LOS LÍMITES. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, AL CÁLCULO Y A LA ESTADÍSTICA.

La Geometría Analítica se inicia en el momento en que se utilizan las gráficas cartesianas para representar relaciones funcionales, y, por consiguiente, no puede considerarse privativa de los cursos superiores de Bachillerato. En mi Seminario didáctico del Instituto de San Isidro he intentado explorar hasta dónde es posible llegar en edades tempranas (primeros cursos del Bachillerato y hasta alumnos de escuelas preparatorias) en el camino de sugerir y de expresar relaciones entre cantidades variables, y especialmente las que ligan las coordenadas de los puntos de un plano alineados con dos puntos dados en él. Cuantas experiencias he realizado en tal sentido han conducido al mismo resultado: los pequeños acaban contando los cuadros del plano cuadriculado para caracterizar la alineación, consiguiendo expresar correctamente la relación que existe entre los números de cuadros contados en un sentido y en otro. Desde edades muy tempranas puede, pues, utilizarse el plano cartesiano para representar relaciones funcionales. Como hemos tenido ocasión de referir anteriormente, en tercero y cuarto cursos pueden representarse simultáneamente varias funciones lineales y aun de segundo grado (trinomios) y resolver así sistemas gráficamente.

Ninguna dificultad suele ofrecer entonces un estudio más detenido de los problemas relativos a rectas, así como los de paralelismo, perpendicularidad, ángulos y distancias en sexto curso; ni tampoco la ofrece la obtención de las ecuaciones de los lugares geométricos de segundo grado (circunferencia y cónicas). Las dificultades didácticas surgen en cuanto hay que aplicar el concepto de límite para el cálculo de tangentes, áreas, etc., es decir, con las primeras aplicaciones del cálculo.

Consideramos de indiscutible conveniencia la introducción de unas nociones de cálculo infinitesimal en el último curso de Bachillerato, ya que fueron los métodos infinitesimales los que determinaron el enorme progreso técnico logrado desde el siglo XVII hasta nuestros días. Pero este cálculo se funda en el concepto de límite, y éste a su vez en la teoría del número real; y en esta teoría radica la dificultad: la de usar un lenguaje científico que no desmerezca del nivel de un bachiller y que le sea al mismo tiempo asequible. Si los mismos matemáticos todavía no se han puesto de acuerdo sobre el modo riguroso de edificar el continuo, nada tiene de extraño que la dificultad suba de punto al pretender construir este edificio en la mentalidad de un adolescente.

Por anticipado puede considerarse no sólo útil, sino contraproducente, toda exageración de rigor dogmático en la exposición de la teoría del número real en Bachillerato, y hemos de contentarnos con que el necesario empleo de un lenguaje inteligible para el alumno no le sugiera errores que luego son difíciles de deshacer. A mi entender, la vía más natural de introducir el número irracional la suministra la misma medición de magnitudes escalares continuas. Ante la imposibilidad de expresar mediante número racional alguno la medida exacta de la diagonal de un cuadrado de lado unidad, o la longitud de una circunferencia en él inscrita, etc., surge espontáneo el uso de las medidas aproximadas por defecto o por exceso en menos de las unidades decimales de órdenes sucesivos. En la vida real, en los oficios y en la alta técnica se adopta tan pronto una como otra de estas medidas, según la exactitud deseada, de modo que, en definitiva, lo que la humanidad conoce y maneja de cada una de tales medidas son dichos valores por defecto o por exceso. Parece, pues, natural considerar las sucesiones indefinidas que constituyen tales medidas y adoptarlas como definición de medida exacta. El concepto de exactitud adquiere así desde el Bachillerato la significación potencial que en definitiva prevalece a lo largo de todo el análisis al manejar en concepto de límite: la posibilidad de hacer el error o diferencia tan pequeño como se quiera. Decimos estar en posesión de la medida exacta de una cantidad inexpresable racionalmente cuando sabemos el modo de obtener medidas racionales aproximadas a ella por exceso y por defecto tan cercanas entre sí como se quiera.

En resumen, la vía didáctica más sencilla para introducir el número real es el método de las sucesiones monótonas convergentes y en particular las sucesiones de infinitas cifras decimales. Las cortaduras o clasificaciones resultan conceptos a nuestro parecer excesivamente abstractos para un Bachillerato, y lo mismo cabe decir de cualquier procedimiento axiomático basado en las modernas estructuras algebraicas. El cálculo con números irracionales se reduce, con lo dicho, al cálculo con sucesiones de números aproximados que los representan. Para formar la suma, diferencia, producto o cociente de dos números reales, construiremos sucesiones de sumas, diferencias, productos, cocientes obtenidos con los términos correlativos de los datos, ordenándolos en forma de que su monotonía y convergencia quede asegurada. Se comprende, por lo tanto, el papel esencial que desempeñan aquí las leyes de monotonía de las operaciones, leyes cuya importancia suele desdeñarse de ordinario en la enseñanza. Todo el cálculo con números aproximados es en rigor un cálculo dual por defecto y por exceso obtenido al combinar convenientemente los pares de datos aproximados para obtener siempre nuevos pares que contengan el resultado.

De lo dicho se infiere la importancia no sólo práctica, sino también teórica, que tiene el cálculo con números aproximados y lo improcedente de su supresión en los programas. Con esta convicción los hemos restituído en los actuales cuestionarios del Bachillerato Laboral, cuya determinación cayó íntegra bajo nuestra responsabilidad. Claro es que el enfoque que nosotros damos a esta teoría de números aproximados es bien distinta de la que se le daba en los cursos clásicos de Aritmética y Análisis. En primer lugar entendemos que el objeto primordial de este cálculo es el cultivo de la noción de aproximación, tan necesaria al teórico como al hombre de acción. En segundo lugar consideramos inoperantes las reglas clásicas usuales para determinar el número de cifras exactas del resultado de un cálculo; pues la grosera acotación del error que suministran determina la pérdida corriente de una cifra por cada operación efectuada, con lo que a las pocas operaciones ya no podemos garantizar la exactitud de cifra alguna del resultado. Se evita este grave inconveniente en el problema directo mediante el recurso natural de efectuar, como hemos dicho, las operaciones por duplicado con objeto de obtener aproximaciones por defecto y por exceso del resultado. El problema inverso (determinación del número de cifras necesarias en los datos para obtener una aproximación prefijada en el resultado) tiene mayor dificultad, pero también se pueden mejorar considerablemente las reglas al uso mediante sencillos tanteos efectuados con los datos, haciendo uso de los límites de error relativo (*).

Observaciones análogas a las expuestas con relación a la teoría del número real cabe repetir para la teoría de límites que en el Bachillerato no debe todavía "epsilonizarse" (permítasenos el uso de este atrevido neologismo que tiene un significado bien definido para todo lector matemático, imposible, sin embargo, de resumir en pocas líneas). Puede sustituirse el "epsilonismo" por el manejo de variables infinitésimas. La tendencia a cero es un concepto de fuerte amarre intuitivo que esclarece y simplifica notablemente los teoremas corrientes sobre límites.

La noción de derivada debe exponerse en conexión con los conceptos geométricos y físicos que le han dado origen (tangentes, velocidades). Sin incurrir en inexactitudes, tampoco debe recargarse la imaginación del escolar con exhibición de excepciones eruditas que despertarían un escepticismo prematuro y contraproducente en el principiante. Salvo los ejemplos de discontinuidades sencillas (saltos bruscos, puntos angulosos) las demás singularidades patológicas de curvas rebuscadas deben descartarse de la segunda enseñanza (por ejemplo, continuidad sin tangente alguna).

(*) V. nuestro artículo *Sobre el problema inverso del cálculo aproximado*, "Revista Mat. Hispano-Americana", número 10, 1926.

Hemos defendido en varias ocasiones, y reiteramos aquí la conveniencia de realzar la ventaja y sencillez que el uso de los métodos infinitesimales introdujo, presentando algún problema clásico, como el de la determinación de la ecuación de la tangente a una parábola, resuelto a la manera como se trataban estos problemas en los tiempos inmediatamente anteriores a la invención del cálculo infinitesimal: consideración de raíces dobles de las ecuaciones que determinaban los puntos de intersección de las curvas con rectas secantes. Los alumnos se dan así cuenta de la gran sencillez que introduce el concepto de derivada. La misma observación puede repetirse en lo que se refiere al cálculo de áreas de figuras planas, volúmenes de cuerpos geométricos corrientes, etc.

La iniciación al cálculo integral se vinculará así a los problemas que históricamente le dieron origen. No es necesario en Bachillerato llegar a adiestrar al alumno en una minuciosa técnica de derivación y menos aún de integración. Como ya hemos dicho, la finalidad específica del Bachillerato es más formativa que propiamente técnica; pero además es de notar que la simple derivación e integración de polinomios enteros permite atacar y resolver un número suficiente de problemas para que el alumno adquiera una idea clara del papel que el cálculo infinitesimal en las aplicaciones. Es particularmente sugerente iniciar alguna lección haciendo observar el hecho de que la expresión que da la longitud de la circunferencia resulta al derivar la que da el área del círculo, y que asimismo la que expresa el área de la superficie esférica es la derivada de la que da el volumen de la esfera. Agradable sorpresa constituye para los alumnos comprobar este hecho y relacionarlo acto seguido con la posibilidad de cálcular el área del círculo por suma de discos infinitamente delgados y el volumen de la esfera por suma de hojas esféricas igualmente finas.

Los motivos de iniciación a la teoría de la probabilidad pueden enlazarse, mediante cualquier tema de apuestas conocido (quinielas, juegos de azar, etc.), al cálculo combinatorio necesario para obtener los casos posibles y los probables. Las distribuciones probabilísticas que interpretan aproximadamente las de frecuencia estadística adquirirán un valor más convincente si se traducen en experiencias efectuadas realmente por los alumnos. Por ejemplo, si proponemos a cada alumno efectuar en su casa diez lanzamientos de diez monedas a cara o cruz y anotar en cada lanzamiento el número de veces que sale cara, se pueden acumular quinientas experiencias en un grupo de cincuenta alumnos, lo que constituye una base estadística suficiente para obtener histogramas de distribución del número de monedas que han caído cara en cada lanzamiento. Su comparación con la distribución binomial de probabilidades teóricas obtenidas por cálculo combinatorio permitirá el ajuste de una por otra, así como el ajuste con la curva normal de distribución, límite de la binomial para un número infinito de lanzamientos. Si cada alumno construye el histograma de sus diez experiencias se verán cincuenta histogramas muy diversos; pero si se agrupan separadamente las experiencias 1.ª, 2.ª 3.ª... de todos los alumnos se obtendrán sólo diez histogramas que serán mucho más similares. El alumno puede darse cuenta con estas comparaciones del significado del teorema de Bernouilli. Y si forma finalmente el histograma de los cincuenta promedios de las diez experiencias de cada alumno y compara la dispersión de este histograma con los de los anteriores se dará cuenta de cómo disminuye esta dispersión y de cómo aumenta la precisión al promediar las observaciones.

La comparación de tales histogramas con los que resultan de distribuir las tallas y los pesos de los propios alumnos (especialmente de los que son de la misma edad), y aún mejor, con la distribución de las evaluaciones a ojo de la talla del profesor efectuadas por los alumnos (*) permitirá sacar jugosas consecuencias teóricas sobre la distribución masiva de los fenómenos en los que intervienen gran número de causas y acerca de las aplicaciones de la probabilidad y la estadística a la teoría de errores.

La elección de parámetros estadísticos para caracterizar un colectivo, en lo que se refiere a una determinada medida (talla, peso, etc.) puede conducirse eurísticamente iniciando una discusión acerca del número que convendría trasmitir telegráficamente para dar idea con un solo dato de la talla o del peso de los alumnos de la clase. La elección del promedio como primer parámetro representativo surge de modo natural y espontáneo, aunque no falte quizá quien proponga la llamada "moda" (raramente la mediana). Ampliando el telegrama a dos datos intuyen fácilmente los alumnos la conveniencia de caracterizar con el segundo dato el grado de separación o dispersión del conjunto alrededor de su valor medio y el primer parámetro que se les ocurre tomar a tal efecto es la separación entre las medidas extremas. Al hacerles observar que en tal distancia sólo están representados los dos alumnos más alejados del promedio es frecuente la propuesta de promediar los valores absolutos de las diferencias con la media. La media cuadrática de tales diferencias o "desviación típica" tiene que ser sugerida ante la consideración de los inconvenientes que para el cálculo tiene el uso de valores absolutos, por las discontinuidades que introducen. El cálculo de correlaciones es de más difícil conducción eurística, aunque siempre pueden aportarse factores de interés en la consideración de correlaciones si se plantean las que existen entre las calificaciones de los propios alumnos en clases de diferentes asignaturas, según su mayor o menor afinidad.

En resumen, la clase como colectivo de sujetos medibles en un cierto aspecto y medidores en otro suministra gran riqueza de situaciones para hacer atractiva la teoría y práctica de la estadística y, en este sentido, dicha disciplina constituye uno de los capítulos más privilegiados de toda la enseñanza matemática en lo que se refiere a la fácil creación a su alrededor de centros de interés didáctico.

PEDRO PUIG ADAM.
De la R. Academia de Ciencias. Catedrático del Instituto de San Isidro y de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.

(*) Sugerencia que agradecemos al profesor Kendall.