AÑO VIII ✶ VOL. XXXIII ✶ 2.ª QUINCENA MARZO 1959 ✶ NÚM. 95

estudios

La didáctica matemática a lo largo de los ciclos medios

DIFICULTADES DE LA PROGRAMACIÓN CÍCLICA.

En otras ocasiones hemos hecho alusión a las ventajas del método cíclico, así como a la dificultad de la organización en ciclos de una materia, como la matemática estructurada desde muy antiguo según unidades lógicas bien definidas: Aritmética, Geometría (organizadas por los griegos), Algebra, Trigonometría (árabes, renacimiento), Geometría analítica y cálculo infenitesimal (siglos XVII y XVIII). Claro es que además de la ordenación jerárquica que la misma evolución histórica de tales disciplinas ha determinado, cada una de ellas se desarrolla a su vez según una amplia gradación de dificultades. Ello determina la inconveniencia de encasillarlas globalmente una tras otra, tomando como casillas los años que van de la niñez a la adolescencia, tal cual se hacía en el Bachillerato de comienzos de siglo. Los alumnos de Euclides no fueron niños; la Aritmética y la Geometría manejan conceptos, estudian problemas y adoptan métodos que llegan a rebasar las posibilidades intelectuales de un niño de diez a doce años. Se hace, pues, necesario desintegrar tan venerables unidades lógicas para integrar otras según principios mejor adaptados a la evolución psicológica del escolar. Y ésta es la principal dificultad de la ordenación cíclica de materia y de la programación consiguiente, en la que es preciso equilibrar las tres exigencias en lucha: la exigencia científica de la materia en sí, la exigencia psicológica del niño, y la exigencia social que quiere hacer de él un ser útil.

La solución simplista consistente en recortar capítulos sucesivos de la Aritmética, Geometría, Algebra y Trigonometría clásicas, y en irlos pegando de nuevo alternadamente en los programas a lo largo del Bachillerato (como se hizo, por ejemplo, en nuestro plan de estudios en 1934) no podía satisfacer ni unas ni otras exigencias, y esta mala interpretación del método cíclico motivó su descrédito y la añoranza con que muchos profesores recordaban las antiguas asignaturas.

La solución correcta exigía la total reestructuración de la materia según unidades nuevas de carácter funcional, que vinieron a reemplazar las antiguas unidades de carácter lógico con ventaja para la enseñanza. La historia misma, en su aspecto genético más que cronológico, puede ayudarnos a perfilar dichas nuevas unidades funcionales, ya que, como he dicho en artículos anteriores, el proceso genético de formación de los conocimientos en el individuo guarda indudable relación con el que ha tenido en la especie humana.

LOS PRIMEROS CICLOS MEDIOS Y EL MÉTODO INTUITIVO.

Actividades matemáticas primeras del hombre fueron sin duda las de contar, medir y construir. El hombre primitivo contaba sus rebaños, medía sus terrenos, construía sus cabañas. De tales actividades surgieron sus primeros conocimientos de Aritmética y Geometría. Hoy las generaciones que nos han precedido nos han legado dichos conocimientos estructurados y perfeccionados. Disponemos de un sistema de numeración que nos permite contar y calcular cómodamente, según técnicas que el niño aprende ya en la escuela primaria. Disponemos asimismo de un sistema de unidades y de instrumentos que nos permiten medir y construir con mayor perfección que antaño. Pero ello no altera la primigenia de tales actividades en la evolución funcional de la humanidad. Parece, pues, razonable organizar un primer ciclo de matemáticas en el Bachillerato alrededor de estos tres verbos: contar, medir y construir.

Hablo, naturalmente, de contar en un sentido lato, que implique a la vez numeración y cálculo. Calcular no es, en el fondo, más que abreviar la operación de contar los conjuntos que se obtienen agregando, disgregando, reiterando, repartiendo... la revisión razonada de la numeración de las operaciones aritméticas con enteros y decimales constituyen, pues, un primer objetivo natural de la Matemática en el Bachillerato.

Al emplear el adjetivo "razonada" no queremos significar lo mismo que racional, deductiva o reductiva. Toda la enseñanza matemática tiene que ser razonada, de otro modo se convierte en un empirismo recetario sin valor formativo. Pero una cosa es la organización racional de la ciencia matemática, que es esencialmente reductiva de unas verdades a otras; y otra cosa muy distinta es la búsqueda razonada del acceso directo a cada verdad a través de amplias realidades concretas. El niño puede llegar a comprender y hasta a descubrir por sí mismo la estructura de las operaciones que realiza y las verdades que aplica por acción directa, real o imaginada, sobre cosas y hechos que las evidencien; y este tipo de enseñanza matemática que es razonada sin ser abstracta, que es realista sin ser empírica, es la que hemos calificado de enseñanza intuitiva y la que propugnamos en los primeros ciclos del Bachillerato.

La actividad de agrupación de objetos aislados en grupos equivalentes; la de éstos en grupos de grupos según la misma cuantía (base, etc.) permite al niño penetrar fácilmente en la estructura de la numeración y de sus operaciones, y aun cuando pueda parecer inverosímil a los lectores que no lo hayan experimentado, los niños que han penetrado en tal estructura llegan en una sesión a operar en bases distintas de la decimal sin dificultad alguna.

La operación concreta de medida sugiere el concepto general de fracción cuando la unidad se divide en un número cualquiera de partes, y en particular sugiere la fracción decimal cuando se divide según potencias de 10, como ocurre en todo el sistema métrico decimal de medidas, que se repasa minuciosamente en este ciclo. En este caso las cifras decimales obedecen al mismo principio del valor relativo, subsistiendo la misma notación que para los números enteros con la indicación, mediante una coma, de la unidad de referencia. En los "Elementos de Aritmética" de la colección intuitiva que escribimos hace años en colaboración con mi querido maestro don Julio Rey Pastor, antepusimos, por cierto, el estudio y manejo de las fracciones decimales al de las ordinarias. Y hemos seguido haciéndolo así en las adaptaciones sucesivas de nuestros textos, en atención a: 1.º) La preponderancia que tienen las medidas decimales sobre las fraccionarias en los países como el nuestro, que han adoptado desde antiguo el sistema métrico decimal, 2.º) La sencillez que se deriva de la aplicación inmediata del cálculo con números enteros sin más innovación que el aditamento de la coma colocada en su preciso lugar, 3.º) La conveniencia didáctica de anteponer lo particular a lo general. Procedemos, pues, de esta suerte, sin perjuicio de presentar más adelante (segundo curso) las fracciones decimales y su cálculo como caso particular de las ordinarias, reduciendo unas a otras en ambos sentidos.

Las construcciones geométricas primeras, que en la más remota antigüedad se realizaron con la cuerda tirante como único instrumento (que aún usamos en el encerado en funciones de regla y compás a un tiempo) se enriquecen hoy con el uso de instrumental de dibujo que es ya del dominio corriente (regla, compás, juego de escuadras, papel de calco...) y cuyo uso implica movimiento. Sobre la congruencia, o *transformación por movimiento*, parece, pues, natural edificar hoy los conocimientos geométricos primeros, y así lo venimos haciendo, siguiendo la concepción kleineana, desde la publicación de nuestros "Elementos de Geometría" de la mencionada colección intuitiva y en sus adaptaciones sucesivas a los primeros cursos del Bachillerato.

La Geometría estudia las propiedades intrínsecas de las figuras, es decir, las que no alteran con el movimiento de las mismas. A cada clase de movimientos corresponde una clase de propiedades y un instrumento que permite realizarlas. El concepto de perpendicularidad y sus propiedades surgen de la simetría axial, el de paralelismo se deriva de la traslación, las propiedades del círculo y de las figuras circulares y sus ángulos aparecen con la rotación o giro. La regla, el juego de escuadras y el compás se manifiestan en su momento oportuno como instrumentos propios de cada género de movimientos. Problemas imposibles o difíciles con ciertos instrumentos resultan posibles o fáciles con otros. Ceñirse a un grupo reducido de ellos, es, pues, limitar los recursos prácticos de la Geometría encerrando en pobres angosturas todo su alcance teórico. Así, por ejemplo, el papel de calço tiene, además de su evidente utilidad práctica, un gran interés teórico porque permite efectuar de una vez ciertos tipos de movimiento, mientras que con la regla y el compás es preciso realizar para cada punto una construcción especial, y no aparece en ella el concepto de *grupo*, que es el fundamento de la Geometría elemental y también de las Geometrías superiores.

Con el estudio de los grupos de movimientos la Geometría elemental y sus construcciones se encuadran en un marco vivo y moderno a un tiempo, respondiendo tanto a las exigencias de aplicación a la vida práctica y a los oficios (donde las formas geométricas se engendran por movimiento de máquinas) como a las exigencias teóricas que han removido los fundamentos de la Matemática en los últimos tiempos.

Continuando en torno a las operaciones primitivas mencionadas, si pasamos de la medición *directa* (generadora de las primeras generalizaciones del concepto de número) a la *indirecta*, la cultura matemática se enriquece considerablemente con la aparición de nexos relacionales o funcionales entre magnitudes: las que se pretende medir y las que en su lugar se miden realmente. No hicieron otra cosa los primitivos medidores de extensiones de terrenos, de volúmenes y pesos de bloques de piedras, de alturas, de distancias innaccesibles..., cuando hubieron de acometer mediciones imposibles de realizar por procedimiento directo (aplicación de la unidad sobre la cantidad medida). La relación aritmética más sencilla usada a tal efecto es la proporcionalidad. Con la proporcionalidad simple o compuesta, y con su aplicación geométrica a la semejanza, puede lograrse la medición de distancias y alturas inaccesibles, y la de magnitudes geométricas y físicas de carácter compuesto como las áreas, los volúmenes, las densidades, las velocidades, etc. Relaciones métricas derivadas de la semejanza o de la equivalencia, como es el teorema de Pitágoras, introducen asimismo la medición indirecta de diagonales, hipotenusas, catetos, etc., utilizando la radicación. Operación inversa es ésta que, juntamente a la directa de potenciación, puede ser presentada en el marco indicado, es decir, en el momento en que parece funcionalmente necesaria. Con todo lo apuntado, así como con la mejora progresiva de las técnicas de cálculo iniciadas en el ciclo anterior (reducción de fracciones a mínimo denominador común, con el estudio previo necesario de la divisibilidad) es posible estructurar racionalmente un segundo curso de Bachillerato (como así se ha hecho en el plan actual) en el que queda ya iniciado el concepto de función que ha de tener más amplio desarrollo en los ciclos sucesivos.

La teoría de la proporcionalidad se proyecta inmediatamente a los problemas de Aritmética mercantil, de un lado, y a la teoría de la semejanza geométrica, de otro, con sus aplicaciones a los mapas, planos, escalas, pantógrafos, etc. El rico contenido concreto de unas y otras aplicaciones sugiere abundantes motivaciones iniciales de arranque de las teorías para el ejercicio de la enseñanza intuitiva y eurística en este nuevo ciclo elemental. Innecesario parece añadir todo el interés educativo que tiene "el método de proyectos", así como las realizaciones constructivas de las escuelas primarias modernas Dewey, Decroly, Claparède..., métodos que son igualmente aplicables a los últimos grados de la primera enseñanza y a los primeros ciclos de la enseñanza secundaria, que, en nuestro país al menos, se solapan con aquéllos.

LA INICIACIÓN AL CÁLCULO LITERAL Y AL ALGEBRA.

El uso de letras en lugar de números para expresar las propiedades generales de las operaciones y las relaciones entre magnitudes no ofrece dificultades si se sabe graduar convenientemente y si se presenta en forma espontánea haciendo uso, por ejemplo, de letras iniciales de las palabras que designan los entes relacionados. Es posible hacer sentir como cosa viva la necesidad de su empleo al condensar en fórmulas literales todas las soluciones de problemas análogos, es decir, resolubles por un mismo proceso de cálculo. A través de la Aritmética aplicada puede, pues, el niño sentir el interés de una Aritmética literal general, y aun iniciarse en los razonamientos efectuados con letras en lugar de números, con lo que le situaremos a las puertas del Algebra. Esta es la forma funcionalmente justificada que preconizamos para iniciar al niño en la técnica algebraica en un tercer curso de Bachillerato.

El número negativo puede ser introducido en este curso, y aun en cursos anteriores sin inconveniente alguno. No faltan ejemplos de la vida práctica que inducen a la posibilidad de interpretar restas cuyo sustraendo es mayor que el minuendo: quedar, por ejemplo, con saldo deudor cuando se gasta más que lo que se tiene; bajar más pisos que los que se ha subido en un edificio con sótanos; descensos de temperatura por debajo de los cero grados... El concepto de cantidades y números opuestos surge así espontáneo permitiendo reducir a sumas las restas de cantidades relativas, así como justificar la regla de los signos interpretando el signo menos como operador consistente en tomar el opuesto, lo que implica su carácter involutivo (perder profundidad es lo mismo que ganar altura, la disminución de una deuda equivale a la percepción de igual ganancia, etc.).

Debe cuidarse el método de forma exquisita en la iniciación al cálculo literal. Toda formalización y verbalización prematuras y exageradas engendrarán los inevitables errores procedentes de extrapolaciones y confusiones tan características de los escolares de todo el mundo en este grado. Y es que la enseñanza matemática adolece universalmente del defecto de formalismo anticipado. La analogía entre las propiedades formales de la adición y de la multiplicación sugiere fácilmente en el alumno la confusión de una por otra en cuanto se simbolizan, y, por tanto, también la confusión de sus respectivos elementos neutros cero y unidad. Los clásicos errores

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b} \; ; \; \frac{a}{a}=0 \; ; \; x^3+x^2=x^5 \; ; \; (a+b)^n=$$

$$=a^n+b^n \; ; \; \sqrt{x^2+y^2}=x+y \; ; \; \text{etc.}$$

no reconocen otro origen. El niño, lanzado prematuramente a un complejo automatismo cuyas reglas no ha elaborado ni descubierto por sí mismo, las confunde y las extrapola con facilidad; y transforma y simplifica erróneamente por simple y explicable confusión con transformaciones similares perfectamente lícitas

$$(a+m)-(b+m)=a-b \; ; \; a-a=0 \; ; \; x^3 \,.\, x^2=$$

$$=x^5 \; ; \; (a+b)\,n=an+bn \; ; \; \sqrt{x^2 \,.\, y^2}=x \,.\, y \; ; \; \text{etc.}\ldots$$

Se hace, pues, necesario en esta etapa, quizá más que en ninguna otra, que el niño vaya conquistando paso a paso su técnica de cálculo por un proceso propio de autocorrección que le habitúe a reconocer sus fallos, a rectificarlos, adquiriendo así seguridad y confianza en evitarlos. En nuestro librito sobre "Didáctica matemática eurística" hemos descrito varios ensayos de lecciones de cálculo literal desarrolladas según método eurístico, con el que los alumnos descubren por sí mismos las reglas operatorias (incluso la división de polinomios) obteniendo mucha mayor seguridad de cálculo que con los procedimientos usuales fundados en la cómoda enunciación de reglas y en la anticipación consiguiente de automatismos irreversibles generadores de tanta rigidez como inseguridad.

Las mismas advertencias hechas a propósito de los comienzos del cálculo literal pueden repetirse en lo que se refiere a la iniciación de la teoría de ecuaciones. Es pena ver los estragos que ocasionan en nuestro alumnado los procedimientos recetarios de todos aquellos profesores que se dedican a preparar en vez de formar. La falta de todo criterio simplificador en la elección de variables a eliminar en un sistema, la rutinaria eliminación por sustitución de la x, aunque resulte mucho más complicada que cualquier otro recurso eliminario que salta a la vista, la invariable aplicación de la fórmula general que da las raíces de una ecuación completa de segundo grado aunque la ecuación sea incompleta, etc., son defectos no imputables al niño, sino a la comodidad o a la inopia mental del profesor que los ha cultivado.

Una vez más hemos de insistir, pues, en la inconveniencia de anticipar las reglas y los automatismos al dominio previo de los procedimientos. El Algebra nació sin duda entre los árabes en busca de una economía de pensamiento al tratar de mecanizar la solución de los múltiples y complicados problemas de herencia a los que eran tan dados. Una vez que el hombre ha dominado la solución de varios problemas similares, busca una formalización de sus métodos resolutivos, es decir, una automatización de ellos que le libere de la repetición inútil de esfuerzos ante dificultades ya superadas. Tal proceso de economía intelectual no sólo es lícito, sino necesario para todo cerebro capaz de acometer nuevas dificultades con la energía así liberada. Pero anticipar los automatismos en un cerebro de formación es precisamente incapacitarle para todo esfuerzo autónomo, constituyendo en tal sentido un pecado de lesa pedagogía.

Por ello conviene no entregar demasiado pronto al alumno a la rutinaria comodidad del mecanismo algebraico, sino procurar que busque también caminos aritméticos de solución, por cierto algunas veces mucho más breves y directos que los algebraicos. Es clásico el problema del hortelano, llevando manzanas, que al encontrar a tres guardas da al primero la mitad de las que lleva más dos, al segundo la mitad de las que le quedan más dos, y al tercero la mitad de las sobrantes más dos. Sabiendo que al final le queda una, ¿cuántas llevaba? Desandando lo andado, es decir, reconstruyendo los números de manzanas que iba teniendo en cada uno de los momentos del enunciado, recorrido a la inversa, la solución aparece inmediata, mientras que el planteamiento algebraico da lugar a una incómoda ecuación.

El mecanismo algebraico de las ecuaciones y sistemas lineales puede concretizarse mediante ejemplos de equilibrios en balanzas, conseguidos con pesas y objetos de igual peso desconocido. Las manipulaciones que los mismos niños ejecutan en busca de equilibrios simplificados suministran una imagen muy provechosa de los procesos resolutivos. Estos surgen así como resultado de una investigación activa en vez de unos razonamientos abstractos o de unas simples reglas recetariamente suministradas. Particularmente instructiva y clara resulta la interpretación de los sistemas homogéneos obtenidos al plantear equilibrios entre varios objetos distintos de peso desconocido.

Es del mayor interés, no sólo por sus aplicaciones a la vida moderna, sino también por lo que tiene de formativo con vistas al estudio posterior de la Geometría analítica, ejercitar abundantemente al alumno en el uso de gráficas cartesianas representativas de las funciones que la Aritmética y los primeros rudimentos de Algebra han suministrado ya en los grados elementales. La vida ofrece ejemplos variadísimos que, de puro conocidos, es inútil repetir aquí; quizá entre los más complejos y educativos sean de citar las gráficas de móviles (ferrocarriles) con las que pueden lograrse lecciones llenas de interés para los muchachos, especialmente si se las sabe aderezar con el pretexto de cualquier episodio policíaco.

LOS CICLOS EVOLUTIVOS. LAS FUNCIONES TRASCENDENTES Y LA TRIGONOMETRÍA.

La complejidad creciente de las funciones que aparecen en el mundo físico y social marcarán los ciclos sucesivos en la etapa de transición de los cursos elementales a los superiores de Bachillerato. Las leyes físicas en las que intervienen funciones de segundo grado (la caída de los graves, por ejemplo) pueden dar motivo inicial para el estudio del trinomio de segundo grado, y para la resolución de las ecuaciones y problemas de segundo grado, con la necesaria introducción previa de los irracionales cuadrativos y del cálculo con radicales. El estudio de las progresiones geométricas y del interés compuesto y de sus aplicaciones pueden servir de introducción a las funciones y ecuaciones exponenciales, mientras las primeras mediciones indirectas de distancias y alturas mediante el uso de goniómetros darán ocasión propicia para comenzar el estudio de la Trigonometría. En nuestro libro sobre "Didáctica matemática eurística" indicamos diversos motivos de iniciación activa para la introducción de las funciones trigonométricas y la formación de tablas y gráficos en relación con problemas de mediciones al aire libre o en el interior de la clase.

Conviene descargar la trigonometría del despliegue abrumador de fórmulas iniciales con las que se solía presentar antiguamente, y limitarse a deducir progresivamente las que van haciendo falta a medida que la complejidad de los problemas abordados lo exige. Así, la resolución de triángulos rectánculos en todos los casos es tarea que el mismo alumno realiza fácilmente con sólo recordar las definiciones de las funciones goniométricas, seno, coseno y tangente y disponer de unas tablas de ellas. El alumno mismo resuelve triángulos oblicuángulos eurísticamente, descomponiéndolos en triángulos rectángulos y resolviendo éstos en el orden necesario. Como resumen del proceso resolutivo espontáneamente descubierto por el alumno se obtienen entonces los teoremas y las fórmulas sintéticas llamadas "de los senos" y "del coseno".

Creemos que el empleo de estos dos teoremas es suficiente en un Bachillerato formativo ordinario. Ellos bastarán para resolver, con la aproximación exigible en unos ejercicios escolares, los ejemplos prácticos de aplicación realizados con sencillos aparatos en los alrededores del Instituto o Colegio y su localidad. Solamente en estudios medios de carácter profesional ligados a la topografía y a la navegación es aconsejable insistir todavía en el problema de la resolución de triángulos, problema minúsculo dentro del amplio cuadro de aplicaciones que aborda la matemática de hoy. La exagerada importancia que se sigue dando a la trigonometría en los problemas escolares tiene su origen en un hábito heredado de tiempos en los que la navegación, la topografía y la geodesia ocuparon un primer plano en las aplicaciones de la Matemática. El mejor conocimiento del geoide terrestre a que había conducido la elección de la unidad métrica, el incremento de las comunicaciones por mar y tierra, la construcción de carreteras y vías férreas, la organización de las institutos geográficos y castastrales... habían llegado a crear una verdadera técnica calculista de resolución de triángulos con el empleo de fórmulas que redujeran al mínimo la búsqueda de datos en tablas logarítmicas y al máximo la exactitud (analogías, teorema de tangentes, fórmulas de Briggs). Pero todo bachillerato esencialmente formativo ha de anteponer el cultivo de ideas y el alumbramiento de vocaciones a la adquisición de técnicas específicas; y aun en los estudios medios en los que se trata de equilibrar lo técnico y la formativo (estudios medios profesionales a los que modernamente se tiende para mejorar la formación de las clases sociales que han de vivir de la agricultura, de la industria, del comercio) es de tener en cuenta que dichas técnicas presentan hoy ya una multitud tan grande de problemas vitales que su enfoque matemático se enriquece con amplias y nuevas perspectivas a las que hay que dar pronto cabida, sacrificando, si es preciso, capítulos trasnochados, por muy venerables que nos parezcan. Tanto desde el punto de vista técnico como del formativo consideramos, por ejemplo, mucho más interesante dar actualmente al bachiller una idea del funcionamiento de las máquinas de calcular, de las relaciones algebraicas que rigen las conexiones de circuitos eléctricos, del manejo estadístico de colectivos..., que abrumarle con fórmulas trigonométricas de utilidad casuística. Con las de adición de argumentos tendría bastante para formular en su día el incremento del seno o coseno y poder calcular sus derivadas.

ELABORACIÓN INTERNA DEL ESPACIO EUCLÍDEO. TRANSICIÓN DE LO INTUITIVO A LO RACIONAL.

El espacio intuitivo se elabora en el niño por un proceso interno de idealización del espacio perceptivo.

Experiencias fáciles de realizar (*) permiten comprobar, por ejemplo, cómo el niño se forma espontáneamente los conceptos de plano infinito y de recta infinita, aun partiendo de ilimitadas representaciones materiales de los mismos. No hay, pues, peligro alguno en partir de tales representaciones para intuir las propiedades del espacio euclídeo, ya que, aun utilizando imágenes materiales, el niño las idealiza espontáneamente y elabora así su visión interna del espacio euclídeo. Es de todo punto contraproducente pretender edificar dicho espacio, como se hacía en los cursos clásicos de Geometría (lo que aún recuerdo con horror de mi niñez) a fuerza de golpes de reducción a lo absurdo. "Supongamos que esta recta no cortara el plano...", y el niño no podía suponer tal cosa porque estaba intuyendo que tenían que cortarse. Se le desconcertaba asimismo admitiendo por evidentes ciertas propiedades (axiomas) y haciendo depender de ellas a continuación, tras largos razonamientos, otras verdades no menos evidentes. El proceso lógico reductivo característico de la escuela griega no tiene interés alguno para el niño, el cual repugna a todo aquello que no obedece a una necesidad sentida. El niño tiene también *su lógica,* más funcional que reductiva, y dentro de ella es perfectamente consecuente.

La evidencia sensible precede necesariamente a la evidencia intuída y ésta a la evidencia lógica. La construcción racional del espacio requiere un cierto grado de madurez mental y a ella debe llegarse progresivamente. En un principio interesa, sobre todo, que el niño adquiera múltiples vivencias sensibles, que las interiorice convirtiéndolas en intuiciones, que fomente así la visión interna idealizada de las relaciones que ligan los elementos del espacio a través de las operaciones típicas de la geometría: prolongaciones, proyecciones, secciones, movimientos, etc.

El razonamiento reductivo se iniciará en su momento necesario para establecer aquellas primeras verdades que la intuición no alcanza o deja en duda. Surgirán así los primeros eslabones de cadenas deductivas, las cuales se irán prolongando a medida que se vaya accediendo por vía deductiva a verdades menos evidentes. Así, por ejemplo, al estudiar las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia y su medida (lo que se hace sin dificultad en un segundo curso) la relación con el ángulo central que permite dicha medición indirecta, se ha conquistado a través de la siguiente cadena de propiedades sucesivamente implicadas: suma de los ángulos de un triángulo, valor del ángulo exterior, relaciones entre los ángulos formados por dos paralelas y una secante, propiedades de la suma y diferencia de ángulos, estas últimas relaciones y propiedades directamente intuíble como consecuencia de las traslaciones, giros y simetrías. Como hemos dicho anteriormente, tales razonamiento son perfectamente compatibles con la orientación de la enseñanza en los primeros ciclos. No contradicen la intuición, por el contrario, la ayudan donde aquélla no pueda llegar directamente, y van preparando paulatinamente la transición de esta fase primera a la fase última de penetración consciente en el método racional y de elaboración consecuente del espacio lógico.

En este proceso evolutivo de elaboración del espacio euclídeo en la mente del escolar puede haber momentos en los cuales se haga incluso precisa la dualidad de recursos: la llamada directa a lo intuíble (cuando no a lo perceptible, a lo visible y palpable) y acto seguido el razonamiento deductivo que confirma y consolida. La evolución mental de los muchachos en estos cursos de transición entre la niñez y la pubertad es tan rápida y tan desigual entre unos y otros que es frecuente la presencia en una misma clase de mentalidades sensibilizadas ya a la evidencia lógica y de otras todavía insensibles a ella. Haciendo en tales casos un uso discreto de la dualidad de métodos indicada, cada alumno adquirirá al menos *su* verdad en el grado de evidencia adecuado a su desarrollo.

En los estudios medios de carácter profesional y técnico, la edificación interna del espacio euclídeo debe completarse con la iniciación en el lenguaje descriptivo y tienen perfecta cabida en este grado unas primeras y elementales nociones sobre los sistemas de representación más usados en los oficios y en el dibujo, a saber, los planos acotados, el sistema diédrico y la perspectiva caballera.

(Continuará.)

(*) V., por ejemplo, nuestro citado libro "Didáctica matemática eurística", publicado por la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

El arte y los niños

Los niños andan por ahí, crecen y sueñan con su imaginación abierta el mundo del conocimiento que les es posible.

El acto de conocer supone previamente el de intuir. Se ha dicho: "La intuición es la antesala de la inteligencia", del conocimiento. Los niños en arte son la intuición del artista. La intuición es como alimento previo, natural, fruto del campo a su alcance en espera de los otros exactos, vitaminizados por la razón, que les darán la noción rigurosa y precisa —y, por tanto, menos poética— que la intuitiva de hoy. Cuando no se puede conocer se urde imaginativamente, se balbucean palabras o "palabros", se pinta...

Al coger un lápiz o un pincel, el niño trata de explicarse todo lo que está a su alrededor. Las poesías son misterios explicados para los mayores. Los dibujos coloreados son múltiples misterios; tantos como el mundo tiene para ellos, para los niños. Al echar mano de un color o de una línea los niños desvelan, levantan el tapete del misterio por una de sus puntas.

No saben lo que hay debajo.

Donde hay un bulto, ven una montaña.

Donde circula una hormiga, perciben tal vez un monstruo.

Donde pulula la gente, inventan un carnaval.