Reseña de libros

G. H. HARDY: "The case against the mathematical Tripos", *Mathematical Gazette,* 1948. Págs. 134-145.

El gran matemático inglés Hardy, últimamente fallecido, expresa en el anterior discurso, con palabras encendidas y apasionadas, su repulsión ante los métodos examinadores del *Tripos.* Traemos a estas páginas un breve comentario de la alocución de Hardy por varias razones, a pesar de la relativa pérdida de actualidad de su publicación. Una de tales razones es, justamente, que las noticias de última hora no suelen ser las más importantes. Consideramos, en cambio, de interés todo aquello que reobra sobre nuestro presente o que ilumina lo que sucede actualmente en el mundo. Otra razón es que resulta conveniente presenciar las disputas abiertas y claras sobre temas de relieve que se desarrollan allende nuestras fronteras. La vida que así se expresa puede servirnos de lección.

Hardy comenta acremente la improcedencia del sistema de exámenes matemáticos conocidos por la palabra *Tripos.* Según este plan, los puestos alcanzados por un examinando repercutían en su vida profesional posterior. Las pruebas a que eran sometidos en tiempos de Hardy los estudiantes del *Tripos* eran francamente absurdas y, en la mayoría de los casos, no revelaban un verdadero talento matemático, sino un ingenio cultivado para resolver problemitas dependientes del uso de trucos o de ideas más o menos felices. Es claro que la meta perseguida era buena: descubrir al estudiante capaz de un pensamiento original. Pero, como dice Hardy, sólo hay un modo de probar la originalidad matemática: la realización de obra original. Y como es inútil pedir a un muchacho de veintidós años que realice un trabajo original en las condiciones del examen, las pruebas degeneraban necesariamente en una especie de juego o exhibición de virtuosismo. Por otra parte, agrega, la instrucción matemática encaminada a preparar para los exámenes solía reducirse a la enseñanza de una serie de trucos y de recetas.

Naturalmente, a Hardy no le molestaba el sistema por la importancia del orden de méritos en la carrera de una persona. Esto le parecía relativamente insignificante. Lo que él denunciaba con indignación eran los efectos nocivos sobre la enseñanza universitaria y la formación de los matemáticos. Hasta tal punto que, tal vez excediéndose en su juicio, llegaba a culpar al *Tripos* de la carencia de matemáticos ingleses de primera fila. Habla de Newton, de quien afirma que es cosa segura que está a la altura de Arquímedes y de Gausa. Y añade que, desde los tiempos de Newton, Inglaterra no ha producido matemáticos geniales. Es verdad, dice, que ha habido matemáticos ingleses—por ejemplo: Cayley—que estuvieron a la cabeza de los matemáticos de su tiempo. Pero su número ha sido extraordinariamente pequeño. Mientras que Francia o Alemania daban veinte o treinta, Inglaterra producía dos o tres... Después de esto observa con amarga ironía, al parecer excesiva en su apasionamiento: "¿Cuáles han sido las características de los matemáticos ingleses? Instituciones incidentales, realizaciones aisladas suficientes para probar que seguía habiendo capacidad. En la mayoría de los casos, simple afición, ignorancia, incompetencia y trivialidad." Reconoce que palabras tan duras constituyen un juicio cruel, pero desgraciadamente imposibles de rebatir por un crítico objetivo y veraz. A nuestro juicio, las anteriores palabras de Hardy eran a propósito un mucho exageradas. Su valor era retórico y desempeñaba un papel dentro de concretas circunstancias propias de la Gran Bretaña en esos años. Pero si podamos la fronda exuberante del discurso nos encontramos, empero, con un hecho de enorme importancia: un gran matemático inglés contemporáneo denuncia el estado de la enseñanza de la matemática en un país de buena tradición matemática. No cabe duda que Hardy tenía razón al quejarse tan amargamente. La enseñanza de la matemática, en efecto, deja mucho que desear cuando se sabe, por la honda experiencia de toda una vida dedicada a la ciencia, lo que podría hacerse y no se hace.

El paso más trascendente de la enseñanza de la matemática parece consistir en saber mostrar la verdadera significación de la matemática dentro de la vida humana. Una cosa es enseñar esto y otra muy distinta dar a conocer al discente una serie de técnicas o de rutinas científicas. Veamos en apoyo de esta tesis didáctica las palabras del mismo Hardy: "Yo debo al profesor Love algo mucho más valioso que todo lo que me enseñara directamente. Porque él fué quien me dió a conocer el *Cours d'analyse,* de Jordan, la "biblia" de mis primeros años. Nunca olvidaré el asombro que sentí al leer este libro notable, al que tantos matemáticos de mi generación deben su educación matemática, y supe por primera vez, conforme lo iba leyendo, lo que la matemática es realmente". Hardy declara a seguida que su devoción por la matemática era de una clase fanática y extravagante, que creía en ella y la amaba apasionadamente hasta el punto de que se sentiría muy desgraciado sin ella. Afirma también que está convencido de que todo el que tiene talento para ella se divierte de verdad con su cultivo y que tiene que considerarla como la disciplina más bella del mundo... Expresiones todas, como se ve, propias del enamorado. Es indudable que para hacer grandes cosas en el mundo hay que estar poseído de cierta clase de fanatismo apasionado y obsesivo. Pero la cosa es que ese espíritu monacal y heroico no se puede exigir a todos. El mismo Hardy lo reconoce cuando señala que una gran cantidad de estudiantes deja la matemática simplemente porque se la enseñan mal. Si los métodos didácticos fueran mejores, tales estudiantes podrían prolongar, sin duda, sus estudios matemáticos mucho más de lo que se acostumbra. La clave para lograr este interesante objetivo es para Hardy que *se aparte al alumno de problemas que han dejado de interesar a los matemáticos hace ya cincuenta años;* la elección de verdaderos teoremas, la fijación de hechos fundamentales—no de triviales excrecencias—y el planteamiento de *problemas vivos* de nuestro tiempo. De este modo, la matemática les enseñará a pensar, les ampliará sus intereses y estimulará su imaginación. Dejamos al cuidado del lector interesado por los problemas didácticos de la matemática el fácil comentario que puede hacerse a tan encendidas palabras. Ojalá hubiera en nuestra patria hombres de la talla de Hardy y poseídos a la vez de tan apasionados entusiasmos. Su espíritu magistral haría mucho por el levantamiento de nuestra cultura y la vitalidad de nuestros cursos.
RAMÓN CRESPO PEREIRA.

H. R. HASSÉ: "My fifty years of mathematics" (Mis cincuenta años de matemáticas), *Mathematical Gazette,* 1951.

Damos sin comentario varias ideas interesantes contenidas en el discurso presidencial de H. R. Hassé del 29 de marzo de 1951. El lector que siga atentamente las breves reseñas que en las páginas de la REVISTA DE EDUCACIÓN se dedican a los discursos de algunos presidentes de la Mathematical Association inglesa, estará de acuerdo en que anima a esos presidentes un gran ímpetu vital y que están llenos de preocupaciones por verdaderos problemas de la enseñanza de la matemática en la Gran Bretaña.

* * *

El *verdadero* matemático—no hay por qué decir de "primera fila"—sobrevivirá a los efectos de cualquier enseñanza y de cualquier plan...

Un informe sobre enseñanza dice: "La obra de la mitad, por lo menos, de los estudiantes no se ha encontrado satisfactoria cualitativamente. Una causa de esto puede ser que tales candidatos no dedicaron suficiente tiempo a lograr claridad en los principios generales. La mera manipulación de símbolos acaparó demasiado su atención..." Las columnas de *The Times* contienen muchas cartas y artículos sobre la controversia suscitada por los nuevos planes... Lo que prueba que los matemáticos son seres humanos después de todo... Sería extraño, desde luego, que el impacto de las dos últimas guerras no se hubiera dejado sentir en la matemática, como ocurre en las demás ciencias... Algunos deplorarán la ausencia de cierto tipo de construcciones geométricas, pero ello es un signo de la sustitución gradual del punto de vista geométrico por un punto de vista puramente analítico, que ha ido tomando cada vez más incremento en los últimos cincuenta años. Debido al entusiasmo y a la preeminencia de Hardy, lo mejor de nuestros jóvenes matemáticos fué atraído por el análisis... Los métodos didácticos dependen de la clase de estudiantes. Unos son más capaces de un pensamiento más abstracto. Análogamente, en el uso de los símbolos. *La prueba del pudding está en comerlo.* Pero la matemática no es una función de aquellos a quienes se enseña, y el nivel intelectual ha de ser el mismo para todos. Esto no significa que se enseñe a todos lo mismo... Pero en cada caso han de subrayarse las ideas fundamentales.

* * *

Agrega, además, afirmaciones relativas a cuestiones matemáticas concretas. Por ejemplo: señala que muchas veces ha sucedido que los resultados numéricos han estimulado las investigaciones teóricas, como al tratar de resolver por qué ciertas series numéricas convergen más despacio que otras. Dice también que en los últimos años se ha dejado sentir la necesidad de construir tablas numéricas y matemáticas de varia naturaleza. Piensa asimismo que no debe apresurarse la enseñanza de los vectores.

* * *

Dejemos al cuidado del lector interesado extraer las consecuencias pertinentes.—R. C. P.

Study Abroad. Repertorio internacional de becas e intercambios educativos, VI, 1953-54. Unesco. París, 1954. 710 páginas.

La sexta edición del volumen *Estudios en el extranjero,* que la Unesco acaba de publicar, describe 45.000 becas ofrecidas por los organismos internacionales, los Gobiernos y las asociaciones para que la juventud pueda proseguir su formación y perfeccionamiento en todos los ramos del saber. Estas facilidades benefician a estudiantes, graduados y profesores de más de cien países, los cuales, gracias a este importante movimiento cultural, pueden realizar sus estudios en Centros universitarios de 60 naciones extranjeras.

Con respecto a ediciones anteriores, el repertorio *Estudios en el extranjero* reproduce ahora un informe de la Oficina Internacional del Trabajo sobre las modalidades que adquieren hoy en día los cursillos de formación técnica, en los cuales intervienen cada vez más razones de tipo pedagógico que han llevado a una concepción de programas progresivamente más concretos. Existen en la actualidad 189 planes de este tipo en 29 países, con numerosos acuerdos bilaterales y multilaterales, en los que quedan consagrados elementos comunes que, al incorporarse a la legislación, definen con detalle creciente el tipo, duración de los cursos y las condiciones imprescindibles para asegurar el éxito.

El prefacio está escrito en inglés, español y francés, con opiniones de los expertos sobre la administración de becas. Las indicaciones que se dan en el libro representan una experiencia de más de cinco años, con consultas generales que se celebraron en la Habana, El Cairo y Bankok.

Otro punto importante reseñado en esta guía es el relacionado con una encuesta de la Unesco sobre los estudiantes extranjeros inscritos en Universidades de 70 países. El censo comprende un total de 2.014 Centros de Enseñanza Superior y un total de 107.000 estudiantes. Las cifras reflejan bien el interés del problema, y si los números atribuídos a los Estados Unidos, Gran Bretaña, Francia y Canadá representan un volumen considerable, el área de los países de habla española y portuguesa aparece representado con excelente relieve por lo que respecta a Argentina (3.622 estudiantes extranjeros), España (1.452), Chile (950), Costa Rica (513), Méjico (3.313), Uruguay (1.200) y Brasil (400).

Sobre cada país comprendido en el libro se da cuenta de las entidades que otorgan becas, su cuantía y duración y las condiciones que deben reunir los candidatos. Con todo lo cual se ofrece a estudiantes, administradores y profesores de todos los países los elementos de consulta para que se asegure la mejor comunicación espiritual entre los países.

H. DAVENPORT: "Study and research in mathematics", *Mathematical Gazette*, vol. XXXIV, 1950.

Es la reproducción del discurso presidencial pronunciado el 15 de octubre de 1949 ante la Sección de Londres de la Mathematical Association.

Reproducimos y comentamos algunas partes de la alocución de Davenport, entre otras cosas, para reobrar contra opiniones erróneas sobre lo que es la matemática. No falta quien atribuye a tal ciencia un valor absoluto y olvida que la matemática, como cualquier otra ciencia, posee notas históricas, *es* histórica. También los matemáticos son seres humanos. Como tales suelen equivocarse y dejarse dominar por las pasiones. En todo caso, cada matemático suele poseer una idea propia del contenido de la ciencia que cultiva. No hay que decir que suelen discrepar tales ideas de uno a otro matemático. A causa de una ley histórica curiosísima, la obra matemática, una vez hecha, adquiere una cierta objetividad y consistencia respecto de sus creadores. De aquí que el matemático sienta especial veneración por la obra realizada. Hasta tal punto, que no vacila en personalizarla atribuyéndole una autonomía independiente, una consistencia propia y hasta una inteligencia que, como veremos por las declaraciones de Davenport, el matemático individual llega a creer superior a la suya propia. Todas estas notas tienen interés para la estructuración de la Didáctica. Pasemos, pues, a tratar algunos puntos del discurso precitado.

Hay una cosa en la que todos estarán de acuerdo: que la matemática es difícil. ¡Cuánto esfuerzo para aprender una parte infenitesimal y cómo, aun así, llega uno a adquirir una comprensión imperfecta y es puesto en aprietos por las cuestiones más sencillas! ¡Cómo se engaña uno, durante muchos años, al pensar que se entiende algo a fondo y luego descubre por azar que no se ha dado cuenta todavía de algún punto de suma importancia! Reflexiones como éstas —dice Davenport—nos libran de cualquier sentimiento de complacencia, arrogancia o endiosamiento.

Ahora bien—sigue—: ¿no será más bien que los seres humanos somos estúpidos? Pues da la impresión de que, a veces, la mente humana no se adapta al pensamiento lógico-matemático. "Cuando intento resolver un problema particular siento como si estuviera metido en un laberinto; creo que mi mente persiste en explorar laboriosamente avenida tras avenida para tropezarse al final con un callejón sin salida. Muchas veces volvemos al mismo sitio una y otra vez, monótonamente. Lo curioso es que cuando el problema está resuelto se ve que había un camino "bueno". Reflexionando con detenimiento, se observa que había verdaderas razones para escoger desde el principio esa ruta. Pero tales razonas no se nos mostraban, a pesar de que deberían haber sido evidentes. Tal experiencia—agrega Davenport—me hace pensar en mi propia estupidez más que en la dificultad de la matemática."

Después de todas estas declaraciones, que sirven muy bien para alumbrar sobre los caminos efectivos que sigue la mente del que quiere encontrar la solución de un problema, Davenport advierte que tenemos que precavernos, como profesores de matemáticas, de la teoría natural, pero insidiosa, de que siempre hay un camino "más sencillo" que debemos buscar y seguir... En primer lugar, lo que puede resultar sencillo y natural para un alumno puede no resultar así a otro. Por otra parte, una vez que un profesor ha elegido un método especial, su enseñanza inevitablemente pierde espontaneidad, y ésta es esencial si se quiere suscitar y retener el interés de los estudiantes. Por ello, dentro de este ámbito de cuestiones didácticas subraya un hecho de la máxima importancia: lo decisivo en toda buena didáctica matemática es *saber despertar interés en el alumno.* He aquí las palabras del autor que comentamos: "No hay nada más curioso que comprobar las posibilidades variables de la mente del hombre, según que se haya despertado o no el *interés...* Por ello es posible que las tremendas variaciones en la capacidad mostrada por los estudiantes de matemáticas no sean debidas a la presencia o ausencia de un talento innato, sino a que haya sido suscitado o no su interés."

Alegra oír a un hombre competente decir estas cosas. Resulta extraño que la Pedagogía y la Didáctica suelan olvidar estas realidades que brotan de los senos más hondos de la condición humana. Para que nos decidamos a hacer algo necesitamos que la orden corresponediente dimane de nuestra propia intimidad personalísima. De ahí la inoperancia de las coacciones externas. No basta decir a un estudiante que *tiene que* estudiar. El imperativo se le presentará como ajeno y extraño a su vida y no hará todo lo que podría hacer. Pero, en cambio, ¡qué proceso tan distinto cuando el estudiante no piensa como violencia o imposición el trabajo que se pide de él! No sentirá, cuando el interés sale de dentro, las fatigas del esfuerzo. Su labor le resultará placentera y las cosas irán por buen camino.

Al final del discurso, Davenport reobra contra la célebre *boutade* de Bertrand Russell sobre lo que es la matemática: "En matemáticas no sabemos de qué estamos hablando y no nos preocupamos de si lo que decimos es o no verdad." El autor dice que tal tesis es falaz y sofística. Todos tenemos—sigue—una gran convicción de que *sabemos* de lo que estamos hablando en matemáticas y de que algunas de las proposiciones a que llegamos son verdaderas en un sentido mucho más profundo que el de la mera deducción lógica. Me parece que los axiomas y las leyes de la lógica no proporcionan un mecanismo que integre a la matemática. Pero con esto no hemos dicho la última palabra. Pues supongamos que uno señala a un piano y dice: aquí hay un instrumento musical. La música es el ruido que resulta cuando las teclas se golpean con arreglo a ciertas reglas. Hasta cierto punto, esto es verdad, pero no nos dice nada sobre la naturaleza de la música. Véase cómo somos incapaces de decir así lo que es la música. Tal vez no sea sorprendente que resulte igualmente difícil decir lo que es la matemática.

El lector atento podrá vislumbrar, por estas palabras de un matemático, que la matemática no es una ciencia absolutamente segura, indiscutible y cuyas proposiciones tienen una validez ajena a todas las incidencias del tiempo y de la Historia. Los matemáticos discuten sobre el contenido de su ciencia. Esto es verdad. También es cierto que no suelen entenderse sobre el sentido íntimo de lo que hacen. Pero esto, en el fondo, no es un mal. La actividad mental es así más atractiva. Ahora bien: por encima de las opiniones personales también es verdad, como dice Davenport, que todos damos un sentido a lo que hacemos y a lo que nos pasa. De ahí que la matemática, para poder dar razón de sí, ha de situarse en la vida humana y en la Historia. Sólo así puede cobrar sentido.—RAMÓN CRESPO PEREIRA.

Informe del Director general y del Consejo Ejecutivo sobre las actividades de la Unesco durante el año 1953. Presentado a los Estados miembros y a la Conferencia General en su VIII Reunión de Montevideo. Unesco. París, 1954. 228 págs.

Distribuye la Unesco el informe del Director general y del Consejo Ejecutivo sobre las actividades de la Institución en el curso de 1953. Con arreglo a su Carta de Constitución, la Unesco pretende favorecer las relaciones armónicas entre todos los países a través de la educación, la ciencia y la cultura, y el texto de este informe muestra la extensión y dificultad de la empresa. Solamente las contribuciones aportadas para el trabajo de las Uniones Científicas Internacionales, que agrupan a los investigadores del mundo entero en los principales ramos de la ciencia pura y aplicada, suponen un total de 180.000 dólares.

En el campo de las Universidades, en la vida del teatro, de la música, de las Sociedades de eruditos, historiadores, de la filosofía y de las letras, la Unesco tiena establecidos una serie de contratos con los Consejos internacionales correspondientes que le permiten abarcar así actividades tan diversas y tan necesarias en la cooperación intelectual. Pasando a otros terrenos, el informe del Director, señor Evans, indica que en 31 de diciembre un total de 130 expertos tenían a su cargo la ejecución de 71 planes de asistencia técnica en todos los continentes. Esos trabajos están permitiendo la creación de centros de educación fundamental, de carácter nacional, en Ceylán, Iraq y Liberia. En Haití, el personal formado en el valle del Marbial y los becarios procedentes de Pátzcuaro van a tomar a su cargo trabajos que hasta ahora realizaban bajo la responsabilidad de los expertos internacionales.

En el dominio de las bibliotecas, figura en lugar destacado la acción de la inaugurada en Nueva Delhi, y que a los dos años de funcionamiento cuenta con 45.000 volúmenes y un promedio de 2.000 visitantes por día. En Medellín (Colombia) se hallan muy adelantados los trabajos para la inauguración de un Centro de lectura similar destinado a servir de modelo a los países de habla española y portuguesa, y a fin de encontrar fórmulas adecuadas para que la Biblioteca sea un auxiliar eficaz en las campañas contra el analfabetismo y la educación de base.

En la próxima Conferencia General de la Unesco en Montevideo, este informe del Director general y del Consejo Ejecutivo servirá de base a las nuevas deliberaciones, en las que han de intervenir los 72 países que componen la Institución.—R. E.

JEAN PIAGET y BARBEL INHELDER: *Expériences sur la construction projective de la ligne droite.* Delachaux et Niestlé. Ginebra, 1946. 17 págs.

Se trata de uno de los cuadernos de *Pedagogía experimental y de Psicología del niño,* que se publican bajo la dirección del Instituto de Ciencias de la Educación, de la Universidad de Ginebra.

El presente estudio contiene los resultados de las experiencias llevadas a cabo entre niños suizos de edad inferior a ocho años, con objeto de precisar la génesis de la recta proyectiva.

Como es sabido, existen varias clases de geometrías, cada una correspondiente a diversas estructuras espaciales. Cada geometría queda caracterizada por el grupo de axiomas y de transformaciones que, en el aspecto definido por aquél, dejan invariantes ciertas propiedades. Decir recta a secas no basta para que el significado de tal vocablo quede unívocamente determinado. Cuando se desconocía la existencia de varias geometrías—al menos de modo explícito y sistemático—, se creía que la palabra "recta" bastaba por sí sola para tener significado. Pero en la actualidad se exige algo más. Se necesita saber dentro de qué sistema axiomático estamos operando. El conjunto de postulados o de axiomas (ambas palabras se manejan actualmente como sinónimas) que caracterizan al espacio proyectivo es distinto del que sirve para determinar el espacio euclídeo. La palabra "recta" tiene así, por lo pronto, dos significaciones totalmente distintas. (Naturalmente se puede atribuir al término "recta" otras muchas significaciones, pues el número de espacios geométricos considerados hoy en la matemática no se reduce a dos.) Desde el punto de vista matemático, la recta proyectiva es mucho más simple que la recta euclidiana. También desde otros puntos de vista cabe defender la tesis de una primacía de lo proyectivo sobre lo euclídeo. Así, por lo menos, ocurre en la génesis histórica. Asimismo, en la vida del niño. El primer punto de vista lo defiende entre nosotros el arquitecto don Luis Moya, para quien los monumentos más antiguos de los griegos estarían concebidos proyectivamente. Sólo más tarde se impondría la estructura euclídea en la construcción de ciudades y de edificios. El punto de vista psicológico de Piaget y de Inhelder aboga por la tesis según la cual, antes de llegar a la idea euclídea de recta, el niño pasa por el concepto proyectivo del mismo ente geométrico.

Veamos más de cerca ahora las ideas expuestas en el cuaderno que reseñamos. Las experiencias realizadas consisten en lo siguiente: se dispone de una mesa rectangular y de otra redonda. Hay un cierto número de cerillas con mango de madera plantadas, por la cabeza, en un pedacito de pasta para modelar, a fin de que puedan adherirse a la mesa, quedando en posición vertical. Se dice al niño que estas cerillas representan postes y que hay que plantarlas bien derechas para formar una línea telefónica. Se comienza por situar los postes extremos a distancias variables (20,30 ó 40 centímetros), siguiendo el borde de la mesa rectangular, de manera que el niño, al colocar los otros postes, construya una recta paralela al borde de la mesa. Después de esta experiencia, se vuelven a colocar los dos postes extremos de manera que se evite todo paralelismo con los bordes y toda diagonal. Se procede de manera análoga con la mesa redonda.

Otras experiencias consisten en colocar, preferentemente sobre la mesa redonda, una sucesión de postes en zigzag a fin de que el sujeto corrija la posición de los postes intermedios y los coloque en línea recta. Después que el niño ha hecho las colocaciones que él juzga necesarias, se le pregunta dónde habrá que situarse para juzgar si la línea es o no recta. Los autores dan como resultado de sus experiencias lo siguiente: durante un estadio I (antes de cuatro años), el niño no es capaz de construir una recta ni siquiera paralela al borde de la mesa, así como tampoco de dibujar las rectas de los lados de un triángulo o de un cuadrado. En el estadio II (de cuatro a siete años, aproximadamente), el niño construye con más o menos facilidad la línea recta paralela al borde de la mesa. Pero fracasa en otras condiciones. En un subestadio II A (hasta los seis años), el niño es incapaz de liberarse de las sugestiones que le presentan las rectas que él percibe directamente sobre la mesa. A partir del estadio III (de siete años en adelante), aparte de los casos precoces, la recta se construye independientemente de la posición de los postes extremos, y el sujeto comprueba la derechura de la línea por el método de la mirada que se enfila a los postes desde uno de los extremos. (Obsírvese, pues, que este procedimiento visual de comprobación de la línea recta prescinde de toda métrica. De ahí su carácter proyectivo fundamental. Una de las maneras de tratar la geometría proyectiva es precisamente la de partir de la operación básica de *proyectar*. (Hay otras maneras de hacerlo igualmente rigurosas.) Intuitivamente, esta operación de *proyectar* puede asociarse con la de *mirar*. Luis Moya, en su discurso "La geometría de los arquitectos griegos preeucludianos", dice: "... En cambio, Platón, antes, casi en los tiempos de la Acrópolis, la define como una línea en que un punto intermedio queda cubierto, o a la sombra, por los extremos, o sea, en el camino de un rayo de luz que pase por éstos, y la operación es ahora semejante a la de alinear una fila de soldados".)

Los autores dan cuenta en el cuaderno de algunas de sus experiencias. Después de exponerlas, hacen un pequeño comentario y extraen consecuencias.

En lo que respecta al estadio I, dicen que está caracterizado por la ausencia de una representación de la recta. Sin embargo, el niño tiene un conocimiento perceptivo de ella, pues distingue un cuadrado de una circunferencia. Pero la línea recta es entendida de manera topológica, es decir, como una ordenación de elementos que permanecen próximos unos a otros.

Las consecuencias de Piaget y de su colaborador sobre las experiencias englobadas en el estadio II son éstas: existencia de dos clases de representaciones espaciales: una, simplemente intuitiva, que se encuentra inhibida o favorecida, según los casos, por las percepciones actuales; otra, fundada sobre las operaciones que el niño realiza, con tendencia a una liberación de los apoyos intuitivos.

Por último, según las experiencias más avanzadas—las del estadio III—, queda patente el tránsito al concepto de recta proyectiva: "una línea topológica con sus caracteres ordinales, etc., de tal naturaleza que los elementos permanecen ordenados con respecto a un "punto de vista" y se siguen unos a otros según la relación "delante, detrás", de tal modo que el primero de los elementos oculta a todos los demás".

He aquí una de las experiencias contenidas en el opúsculo que reseñamos para dar una idea del método efectivo seguido por los investigadores suizos: "CHEL (siete años, siete meses) hace una línea recta con seis postes y rectifica la posición a ojo. "¿Dónde habrá que colocarse para ver mejor?" —*Me gusta más estar allí* (en la prolongación, pero sin el enfilamiento de la mirada que conviene). "¿Y de este modo?" (oblicuamente respecto del borde de la mesa). (Hace de una vez una línea recta y rectifica sin inclinarse.) "Aquí, ¿dónde te pondrás para ver mejor?" —*Veo mejor de costado* (donde está). "De este modo, ¿está derecho?" (hay una ligera incurvación). —*No, porque usted ha colocado ésos un poco de lado.* "Pues hazlo tú otra vez" (lo hace). "¿Está ahora derecho?" (Se inclina a un lado, luego al otro y al final, en la prolongación.) —*Sí* (después de haber hecho algunas correcciones)."

Después de publicar el pequeño trabajo reseñado, Piaget, con ayuda del mismo Inhelder, dió a la imprenta dos gruesos volúmenes dedicados a extender sus investigaciones. Los títulos de dichas obras, aparecidas durante el año 1948, son: *La représentation de l'espace chez l'enfant* y *La géometrie spontanée de l'enfant*. En la REVISTA DE EDUCACIÁN (véase núm. 18, pág. 66) hemos dado cuenta de uno de los últimos trabajos de Piaget (publicado en *Scientific American*, 1953) sobre las mismas cuestiones.

RAMÓN CRESPO PEREIRA.