creo difícil, como ya se ha señalado otras veces, hallar una coordenada general que sería la causa de las concreciones particulares. Y esa coordenada puede ser llamada la *sofistificación*. Que el docente sea pagado individualmente por el discente provoca la corrupción del saber. No es cuestión moral, sino ontológica; por eso resulta de más difícil apreciación. El ejemplo del libro de texto puede ser ilustrativo; si por justificar un precio se hinchan sus páginas, automáticamente el saber contenido en tal libro de texto pasa a ser un falso-saber, al no hallarse expuesto didácticamente. Otro ejemplo obvio puede ser el de quien trabaje en otra profesión o profesiones dígase ocho horas y luego dedique una o varias a enseñar; la simple fatiga sofistiza el saber, seudoenseñado. Y no digamos quien sea docente por el simple motivo de no haber candidatos mejores, sin poseer el saber que oficialmente enseña.

La eliminación de esta categoría, ontológicamente, no es difícil. Todo consiste en que la sociedad quiera. Lo angustioso está en que cuando la sociedad se autoestructura de esta forma, las primeras generaciones caen en la sofística; las siguientes ven cómo los mejor dotados se van a otras profesiones, y si son los mal dotados quienes terminan por enseñar, ¿cómo serán los discentes?

La intuición y la enseñanza de la matemática

RAMON CRESPO PEREIRA

No basta saber *qué* hay que enseñar. Es necesario saber también *cómo* hay que enseñarlo. El *qué* de la enseñanza se decide cuando se confeccionan los cuestionarios. El *cómo* suele tomarse cual lo propiamente didáctico. El profesor sabe que tiene que enseñar a unos determinados alumnos una serie de conceptos. Su experiencia, su habilidad, su arte pedagógico, su visión de la matemática y de la cultura humana le llevan a exponer esos conceptos de la forma efectiva que lo hace. Pero en la práctica hay una separación bastante rígida entre esas dos grandes esferas: la del *qué* y la del *cómo*. Y no debería haberla. El profesor debería tener una cierta libertad para modificar el contenido de los programas y asimismo para introducir novedades en la didáctica de una disciplina matemática. En todo momento debería tenerse en cuenta la interdependencia funcional que existe entre las varias esferas de la realidad. En todo caso debería tenerse siempre a la vista que la amplitud marcada por un cuestionario puede ser modificada en vista de las circunstancias y que los métodos didácticos pueden influir sobre el contenido de los temas admisibles en los programas normales.

Justifiquemos estas ideas en lo que sigue. Como siempre, se llega a ellas viendo las cosas desde un punto de vista superior. Hay que ascender camino de la cumbre para poder divisar bellos y extensos panoramas. Se necesita otear el vasto horizonte para formarse una idea atinada de algo. Después es cuando se puede opinar y decidir sobre los detalles.

En el caso que ahora me ocupa (la enseñanza de la matemática) percibo la siguiente exigencia: hay que tener una idea bastante precisa de ciertas notas esenciales de la matemática para poder iniciar reformas y mejoras en la didáctica de tal ciencia. Según sea la noción que poseamos de lo que es la matemática, así acotaremos dentro de su amplio horizonte las parcelas que como educadores pretendemos hacer llegar a conocimiento de los discentes. A su vez, esa idea que la realidad matemática nos fuerza a admitir nos lleva como de la mano a aceptar o rechazar métodos y procedimientos.

Prescindamos por el momento de los graves problemas que plantean al educador los conocimientos realmente esenciales que hay que exigir de un alumno medio. Supongamos que tras de una meditada discusión entre personas idóneas se ha llegado a un acuerdo mínimo y suficiente sobre el contenido de los programas en los diversos cursos de una determinada enseñanza. Al profesor le indican entonces que *debe* enseñar tales y cuales ramas de la matemática. Aparece entonces el problema del *cómo*.

Pero no deben desligarse los métodos didácticos de toda conexión con lo que *es* la matemática vista desde un miradero superior. El profesor sabe que tiene que enseñar un determinado teorema. ¿Cómo lo hará? Tal vez este profesor está convencido de la tesis *logicista*, en lo que ésta afirma sobre el *ser* de la matemática. O bien es amigo de la tesis *formalista*. En una palabra, en todo caso tiene una idea ya formada de lo que *es* una teoría matemática. Esta concepción actúa sobre su mente y le va dictando los procedimientos que desde su perspectiva resultan más adecuados. Sin embargo, prescindamos en nuestras consideraciones de casos tan tajantes y enfoquemos el siguiente caso, más natural y frecuente: el profesor, independientemente de su posición en lo que respecta a los fundamentos de la matemática, tiene que decidir sobre la conveniencia de ciertos puntos. Por ejemplo, tiene que tomar partido frente a la *intuición*.

Y esto porque en determinado momento ha observado que los alumnos han querido quedarse convencidos ante la sugestión poderosa de una cierta figura dibujada en el encerado. A la vista de ella los discentes exclaman unánimes y con miradas encendidas de entusiasmo: "¡Es natural!" Pongamos un ejemplo. Supongamos que el profesor quiere hacer ver a sus discípulos que una curva cerrada divide al plano en dos regiones, una interior y otra exterior. Para esto dibuja un esquema curvo y cerrado cualquiera. Es decir, cualquiera no. El profesor elige siempre una curva sencilla, semejante a un redondel. Entonces es cuando los alumnos, sin más, dicen entender la proposición. Pero el profesor sabe que no basta con eso para concluir que el teorema está demostrado. Sabe que pueden dibujarse curvas enmarañadas y retorcidas que ocultarían al alumno la anterior *evidencia*. Sabe que puede darse una verdadera demostración del teorema y que entonces surgen grandes dificultades, incluso con estudiantes universitarios de alto nivel. La proposición, en efecto, de aspecto tan inocente, exige para ser demostrada con rigor una minuciosa elaboración matemática. Con niños de edad escolar o de segunda enseñanza no puede, pues, pensarse en una demostración acabada. Todo esto debe saberlo el profesor, y ha de llevarle a un punto de vista personal frente a la intuición.

Pero todavía no hemos precisado en qué sentido tomamos la palabra "intuición". Es indudable que no está unívocamente determinado el contenido de tal concepto y que éste no es momento adecuado para indagar con minucia el ámbito significativo que corresponde o puede corresponder a la voz mencionada. No obstante, en este artículo tomo el vocablo en su sentido inmediato y más natural.

Sabemos que la visión de una figura suscita en el espectador una idea inmediata. Tal idea puede ser errónea, pero el sujeto siente una tendencia fuerte a considerar como verdadero *aquello* que tiene ante la vista. Por ejemplo, se dibuja en el encerado ante un niño una figura esquemática. Tal figura concreta tiene fuerza explicativa para él. Por ello el escolar afirma que entiende o no la figura. Pues bien: en este sentido sugeridor e inmediato es en el que tomo la intuición (sé que hay otros sentidos del término intuición, pero ahora no vienen al caso).

Ciertamente no hay mostración más poderosa que la que consiste en presentar ante la mirada del sujeto la cosa misma. Si se quiere decir a alguien lo que es un campo lo mejor es llevarle a uno y afirmar: "Esto es un campo." Pero no se puede hacer lo mismo con la cosas matemáticas. Y ello por una razón sencilla: las cosas de que trata el matemático no pertenecen totalmente al mundo de las cosas sensibles. Si se quiere mostrar un triángulo no basta dibujar en el encerado un cierto esquema y decir: "Esto es un triángulo." En efecto, en tal caso lo que se dibuja sobre el negro de la pizarra con la tiza no son más que unas manchas que el observador "interpreta". Es indudable que el triángulo no "está" sobre el encerado. Pues sobre éste no puede haber más que un símbolo de la cosa mentada.

Como se ve, el tema de la intuición suscita muchos problemas de índole filosófica. Y no es momento de profundizar sobre el asunto. Por ello simplificaremos los términos y convendremos en entender por intuición algo casi equivalente al sentido común.

La vida cotidiana ofrece al hombre ordinario significaciones inmediatas para ciertas realidades. Se dice que *se ven* ciertas cosas. Muchas veces en nuestro trato con los demás apelamos a tal sentido común, a esa intuición simple e inmediata. El contenido de tales vivencias es por ello suelo fundamental para la iniciación de diálogos. Pues sin las experiencias elementales que representan las apelaciones comunes sería imposible que los hombres hablasen. Ahora bien: una cosa es que sea necesario partir de algo para poderse entender y otra que ese algo originario sea el mejor fundamento de la verdad. Hace ya tiempo que en la física y en la matemática se ha visto que el simple apoyo ofrecido por la intuición inmediata de la vida cotidiana no basta. Es preciso, en efecto, algo más preciso, rico y fundamentable para poder hacer ciencia.

Indudablemente, existe otro género de intuición que puede adecuarse a la clase de realidad que requiere el trato con las cosas matemáticas. Cabe una intuición esencial o eidética; cabe una como visión interior apta para destacar sobre el fondo de la vida humana la verdad genuina del mundo matemático. Porque cada mundo tiene su óptica apropiada, exige sus experiencias y necesita de un peculiarísimo adiestramiento. (Esto no significa que pueda o deba prescindirse de las ligaduras de tales pensamientos con el resto de las cosas del mundo, pero sí que está autorizada una acomodación adecuada a cada esfera de la realidad.) En este sentido creo que la clase de experiencia que trae consigo el trato con la matemática lleva de modo natural a destacar una especial "intuición" o "acto", en el que quedan patentes las notas poseídas por los objetos matemáticos. La intuición de este género puede denominarse, sin lugar a dudas, intuición a secas o intuición matemática para que no quepa lugar a confusiones. Entendida así la intuición matemática, es tan inmediata para el científico como pueda serlo la intuición ordinaria para el hombre ingenuo.

* * *

Dicho esto consideremos el partido que el profesor puede sacar de la intuición sensible y veamos en qué medida puede suscitar en sus alumnos la idea de que existe otro género distinto y más sutil de intuición. Ni que decir tiene, hay que tener a la vista *quién* es el sujeto discente. La intuición asequible a un niño de la escuela primaria no es la que podemos suponer en un estudiante de bachillerato. En todo caso conviene destacar hasta qué punto será posible *abusar* de la intuición sensible y cuándo sería nocivo para una verdadera formación callar detalles importantes. Opino que el maestro de primera enseñanza puede dilatar la validez de la intuición sensible en las explicaciones matemáticas que dé al alumno. En los años escolares la mente del niño no está todavía preparada para recibir semillas intelectuales de sutil fermento. El razonamiento lógico riguroso escapa inexorablemente al común de los alumnos de primera enseñanza. Por eso sería ilusorio pretender que el maestro diera de ciertas proposiciones las definiciones conceptualmente precisas que maneja el matemático profesional. Bastará suscitar en la mente alguna resonancia simpática y descubrir la riqueza del paisaje matemático. Para ello hay que intuitivar conceptos y desrigorizarlos, a sabiendas de lo que se hace. Es frecuente que un alumno quede satisfecho con una explicación que se le hace a base de un ejemplo. Matemáticamente se sabe que no basta con ello, ni siquiera con la comprobación de que para casos particulares se cumple una propiedad que quiere demostrarse. Los teoremas tienen un campo de validez indiscutible: una colección (finita o infinita) de objetos. Aun así el maestro puede usar del método eurístico, consistente en someter a estudio un solo ejemplo y dejar que el alumno saque conclusiones. Es indudable que deducciones como ésta serán injustificadas, pero es inoportuna didácticamente la aclaración rigurosa y consentir por el momento en mantener tal situación no será perjudicial. Más adelante, cuando el estudiante madure, habrá tiempo de hacerle ver contraejemplos o ampliaciones pertinentes de la teoría. Por ejemplo, se puede hacer ver ante un dibujo hábil la validez del teorema de Pascal relativo al exágono inscrito en una cónica. Algunos profesores ingleses de la Mathematical Association han destacado el interés con que siguen los niños la mostración de propiedades proyectivas. La comprobación de que se cumple la propiedad despierta en el escolar admiración y respeto. Así se puede patentizar al niño que en la matemática hay cosas bonitas y hasta maravillosas.

Evidentemente, no se puede dar de ciertas proposiciones una demostración rigurosa. Pero ¿qué importancia puede tener esto si se piensa en el bien que para la formación ulterior, para la vocación y las aficiones puede acarrear este dato y otros análogos?

No es menester agregar que ha de quedar al buen juicio del profesor la administración de tal procedimiento. Sólo el caso concreto que constituye un grupo concreto de alumnos permitirá decidir al maestro sobre la conveniencia de *abusar* de la intuición en el sentido que estamos diciendo.

Sin embargo, hay que huir de un grave peligro que el manejo inadecuado de la intuición puede traer consigo: habituar al estudiante a un lenguaje impreciso, incorrecto o falso. Una cosa es que se use de una cierta vaguedad terminológica—porque no se puede hablar con más precisión a un tipo determinado de alumnos—y otra que se permita un lenguaje chabacano o inadecuado cuando se puede exigir del discente mayor precisión en su lengua. En este sentido es recomendable el siguiente precepto: "Velar ante todo por la pureza y el rigor de la lengua matemática." Sólo cuando no se vea atentado grave contra la integridad del pensamiento se podrá anticipar algún puesto en el camino natural para adelantar noticias sobre el paisaje que aguarda. Esta anticipación será permitida al hablar de un teorema cierto, manejándolo como si se hubiera demostrado. Pero ha de hacerse sin declarar explícitamente que se ha hecho la demostración cuando no se ha hecho. Si la tendencia del alumno a cierta edad es la de aceptar como válido algo que no lo es para el científico, ¿por qué no dejar que las cosas sigan su curso natural y esperar a que la mente infantil se haya desarrollado suficientemente para recibir, con la pertinente adecuación, las aclaraciones rigurosas?

No debe quedar ninguna duda sobre este asunto. Ya que el abuso de la intuición puede ser tan fatal que mate todo interés por la matemática, llevando a la idea de que las cosas matemáticas forman un mundo absurdo donde todo puede ocurrir.

También en la segunda enseñanza puede tolerarse un prudente silencio sobre ciertos puntos. Sería improcedente que algún profesor quisiera ser tan riguroso que al llegar a ciertas partes de su enseñanza la consideración de casos especiales le hiciera expresarse de modo que pudiera destruir en la mente de los alumnos sólidas convicciones. Por ejemplo, el catedrático de Instituto sabe que hay curvas que no tienen tangente en ninguno de sus puntos (Karl Weierstrass construyó en 1861 una curva con tan curiosa propiedad). Pues bien: sería nocivo para el alumno medio, y hasta para el estudiante superdotado de sexto curso, que un profesor se esforzase en hacerle ver que existen tales casos extraños. Lo más procedente didácticamente será dibujar en el encerado una curva sencilla y mostrar, valiéndose de recursos simples, lo que significa la tangente a una curva en un punto regular y la relación que guarda esta tangente con la derivada. Pero ¿qué juzgaríamos de la capacidad pedagógica del profesor que después de haberse esforzado por aclarar lo que es una derivada tirase en plena clase la siguiente "bomba": "Os he explicado lo que es la derivada y su relación con la tangente a una curva en un punto; pero habéis de saber que hay curvas que no tienen tangente *en ninguno de sus puntos*"?

Naturalmente esto es hablar en términos generales. Ni que decir tiene que en algunos casos excepcionales cabe anticipar algo a un alumno muy bueno; cabe incluso indicarle un método para construir una curva con tal propiedad. Pero la excepción confirma la regla.

* * *

En el terreno científico puro, los peligros de la intuición han sido descubiertos por la matemática contemporánea. Hans Hahn, hace algunos años, en una reunión del Círculo de Viena, dió una conferencia titulada "La crisis de la intuición" (1). Como es sabido, la ciencia moderna ha ido demoliendo algunos viejos edificios. La teoría de la relatividad de Einstein ha puesto los puntos sobre las íes en lo que respecta a las ideas del tiempo y del espacio medibles. En la matemática los investigadores actuales han ido encontrando fallas graves que, en cierto momento, han hecho temer que se fuera a venir abajo todo el maravilloso edificio construído con tanto esfuerzo y genialidad a través de incontables generaciones de matemáticos. Pero no hay que perder toda la fe en la capacidad del pensamiento humano.

Ciertamente debe refrenarse todo optimismo exagerado. Creer que todo está resuelto o a punto de resolverse y no hay ni habrá problemas, conduce siempre a una catástrofe. Por ello se precisa vivir alerta y estar siempre prestos a reaccionar inteligentemente frente a circunstancias imprevistas.

La situación de la ciencia actual es sobre manera instructiva y propicia. No sólo se han descubierto curvas patológicas como esa de Weierstrass. También se

(1) El trabajo de Hans Hahn ha sido traducido recientemente al inglés. El lector que lo desee puede consultar, al efecto, *Scientific American*, de abril de 1954.

han hallado curvas que llenan un área (como la famosa de Peano de 1890). El gran matemático holandés Brouwer ha sido genial en el hallazgo de extraños ejemplos, como el famoso del mapa de los tres estados que tienen una infinidad de puntos de frontera común para los tres.

¿Dónde queda así la intuición? A la vista de los curiosos resultados a que llega la ciencia actual, ¿puede afirmarse que la intuición sensible inmediata sirve para darnos un último fundamento en que basar nuestras deducciones? Indudablemente, no.

¿Qué enseñanzas se desprenden de la ciencia reciente? Ante todo una: que el uso de la intuición ha de ser siempre comedido y que se necesitan métodos poderosos de verificación y de prueba.

Pero no hay que culpar sólo a la intuición de ciertos desaguisados. Al profundizar en la filosofía de las matemáticas nos encontraremos no solamente con el pensamiento matemático—un pensamiento entre otros muchos—, sino con el Pensamiento. Tal vez esa inseguridad que descubrimos en el mundo matemático no se deba sólo a la intuición. Tal vez sea propio de todo pensamiento humano estar propenso a errores y extravíos. Por ello es tan conveniente estar prevenidos en el enfrentamiento de la mente con la realidad. Todas las precauciones serán siempre pocas.

En todo caso—dejando de lado la potencia y la capacidad del humano pensamiento—la situación genuina de la ciencia moderna nos invita a meditar. Las anteriores reflexiones han señalado algunas consecuencias del uso de la intuición. El profesor y el maestro han de estar enterados de su importancia. Conociendo los alcances y peligros de la intuición, podrán orientar sus métodos didácticos.

La formación religiosa en la Universidad

JOSE TODOLI DUQUE

En una ponencia presentada al Congreso Iberoamericano de Educación de 1952, planteábamos el problema de la formación religiosa en la Universidad. Nuestra exposición originó entonces una amplia discusión, y repetidas veces se nos ha pedido el original para publicarlo. Quiere decir que el tema preocupa. No es de extrañar. La fe sencilla y profunda del pueblo español no tiene, ni puede tener, las características de la fe intelectual que *velis nolis* tiene sus exigencias en el orden dogmático y no le seducen las manifestaciones excesivamente espontáneas en el orden práctico. Lejos de nosotros reprobar ninguno de estos dos campos, ni siquiera de dar preferencia a uno sobre el otro. Por desgracia, en la práctica fácilmente los sencillos llaman laicismo a la religiosidad más personal y menos espontánea de los intelectuales, y éstos califican de fanatismo la sencilla y pura fe de los menos cultivados. En fin, he aquí un problema complejo en cuyo estudio no queremos incluir hoy solamente al estudiante, sino al intelectual en general, cuyos problemas religiosos tienen sus características similares.

El esquema sencillo de nuestro trabajo será éste: estudiar primero los problemas religiosos del intelectual en general, y luego sus causas. Problemas particulares del estudiante universitario. Problemas de orden teórico y de orden práctico en que se incurre al querer abordar una solución. Apuntes para una posible solución.

El presente trabajo del padre JOSÉ TODOLÍ, *O. P., profesor de Etica de la Facultad de Filosofía y Letras de Madrid, trae a nuestras páginas la cuestión, ya planteada en estas mismas columnas, de la enseñanza de la Religión en la Universidad. Luego de estudiar la crisis religiosa que sufre la adolescencia, el autor aborda las características de la religiosidad en el intelectual (la razón y el sentimiento en el orden religioso); ve el peligro capital en una "supervaloración" racional del universitario, y recomienda contra sus peligros "una profunda comprensión de los misterios divinos, una íntima comunicación con Dios y, en sus manifestaciones extrínsecas, una acendrada vida litúrgica". Y como solución al problema de la enseñanza: Formación e información religiosas en una Facultad de Teología y en los Colegios Mayores. Véanse sobre el tema los siguientes estudios publicados en la* REVISTA DE EDUCACIÓN: *José Luis L. Aranguren, "Algunas reflexiones sobre la enseñanza de la Religión" (número 3, julio-agosto 1952, págs. 253-6); José M.ª Cirarda, "La enseñanza de la Religión" (núm. 8, marzo 1953, págs. 218-22); José M.ª de Llanos, "La enseñanza de la Religión en la Universidad" (núm. 19, marzo 1954, págs. 100-2) y "Polémica en torno a la enseñanza de la Religión en Zurich" (núm. 19, marzo 1954, "Actualidad educativa", pág. 143). Desde un aspecto diferente del tema, puede consultarse: Raimundo Paniker, "Teología y Universidad" (número 16, diciembre 1953, págs. 79-82). Véanse también Juan B. Manyá, "En torno a un fracaso reconocido", y V. E. Hernández-Vista, "La enseñanza de la religión en la Universidad* (R. DE E., *núm. 21, mayo de 1954).*