

3. El aprendizaje de matemáticas y la resolución de problemas

Norberto Corral Blanco

Carlos Carleos Artime

Ángela Blanco Fernández

Itziar García Honrado

Ana Belén Ramos Guajardo

Universidad de Oviedo

RESUMEN

En este artículo se estudia la relación que guarda el aprendizaje de las matemáticas con la experiencia del alumnado en la resolución de problemas de la vida cotidiana. También se analiza la asociación de todo ello con el rendimiento en la prueba PISA de resolución de problemas. Entre las conclusiones obtenidas cabe destacar que, al medir la perseverancia con el cuestionario de contexto, ha sido necesario considerar dos factores; el primero relacionado con la perseverancia global y, el segundo, con la consistencia en las respuestas. Por otra parte en las estrategias de resolución de problemas cotidianos, se puede diferenciar al alumnado que utiliza un enfoque reflexivo-metódico del que utiliza un enfoque inmediato-cómodo; los alumnos reflexivo-metódicos tienden a tener mayor rendimiento y a escoger la estrategia de estudio de las matemáticas más eficaz según la situación de aprendizaje (control – relación – memoria). Una mayor experiencia en matemática pura está asociada a mayores rendimientos mientras que, en matemática aplicada, los mejores resultados se obtienen con una experiencia moderada. Esta diferencia se explica no tanto

por la dicotomía “pura-aplicada” como por el hecho de que el alumnado que suele realizar con más frecuencia las tareas consideradas de matemática aplicada tiene, en general, peores resultados en otras pruebas PISA (Matemáticas, Ciencias y Lengua).

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos del Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos en su edición del año 2012 (OECD, 2013a y 2013b) se centra en la evaluación de las estrategias y actitudes que presentan los estudiantes de 15 años ante la resolución de problemas. En el año 2003 se incorporó al informe PISA este complemento al análisis del rendimiento en matemáticas, lectura y ciencias, pero en 2012 además de las pruebas habituales, impresas en papel, se incluyeron unas nuevas diseñadas de manera específica para ser resuelta empleando el ordenador (CBA *Computer-Based Assessment*). No debe pasarse por alto la posible interrelación entre los resultados obtenidos en dichas áreas y en la resolución de problemas, por lo que es importante un estudio conjunto para identificar las conexiones existentes entre los mismos.

En este artículo nos centraremos en el tándem matemáticas - resolución de problemas, cuya relación queda reflejada en múltiples estudios previos. Por ejemplo, de acuerdo con el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM 2000, p.52): “La resolución de problemas implica comprometerse con una tarea en la que el método de resolución de la misma no es conocido de antemano. Con el fin de encontrar una solución, los estudiantes deben indagar en su conocimiento y, a través de este proceso, desarrollarán con frecuencia nuevo conocimiento matemático”. Por lo tanto, el reto que supone enfrentarse a un problema resulta más exigente que la realización de un simple ejercicio; así pues, a lo largo del texto mantendremos la distinción que se hace entre problemas y ejercicios en el cuestionario PISA.

Además de la resolución de problemas en el ámbito matemático, se incluyen en el estudio PISA 2012 CBA problemas que surgen con frecuencia en la vida cotidiana no relacionados con un ámbito de conocimiento específico y que pueden requerir procesos mentales más generales y complejos (Funke, 2001). Según Schoenfeld (1985, 1992), existen cuatro dimensiones clásicas en relación con la resolución de problemas: el conocimiento de base, los procesos heurísticos, la metacognición y los componentes afectivos. Por tanto, el desafío que presenta la resolución de problemas es tanto emocional como intelectual. Según se indica en el informe de la OECD (2013a), la motivación del estudiante así como las actitudes hacia el aprendizaje son factores cognitivos que influyen de un modo claro en el rendimiento del mismo.

El informe español PISA 2012 se ha centrado en diversas actitudes y disposiciones del alumno hacia la resolución de problemas, destacando entre ellas el interés, la motivación extrínseca, la perseverancia y la facilidad para enfrentarse a los problemas. En este trabajo se tratará de relacionar el comportamiento en algunas de estas variables metacognitivas/afectivas con el rendimiento en resolución de problemas y en matemáticas, así como con el índice económico socio-cultural de las familias.

También se analizarán diversos procesos heurísticos de los estudiantes a la hora de enfrentarse a un problema específico, que nos permitirán establecer varios perfiles de estrategia para resolver problemas. Estos perfiles se relacionarán posteriormente con los respectivos rendimientos y con el índice económico socio-cultural.

Adicionalmente, en la primera sección del trabajo, se realiza un análisis de la consistencia de las respuestas a algunas preguntas del cuestionario de contexto de PISA

2012. Se analizan varias fuentes de inconsistencia; por ejemplo, debida a niveles altos de subjetividad en la respuesta, o a contestaciones incoherentes de los alumnos, que son descubiertas mediante preguntas control.

MARCO METODOLÓGICO

Los datos analizados, correspondientes al informe PISA 2012 CBA de Resolución de Problemas en el que participaron 10.175 personas de quince años de edad, contienen información recogida mediante cuestionarios de contexto y la resolución de pruebas PISA de rendimiento.

Por primera vez en las pruebas PISA, un bloque de las cuestiones se realizó a través del uso de ordenadores. En el trabajo “Del lápiz al ordenador: ¿diferentes formas de evaluar las competencias del alumnado?”, realizado por Marcenaro et al., que se encuentra en este mismo volumen, se recoge un estudio sobre el impacto que produce este cambio sobre los factores usualmente abordados en los informes PISA.

En general las respuestas son percepciones o apreciaciones dadas por los estudiantes que pueden tener una cierta componente de subjetividad; por ejemplo, para una persona, no siempre es sencillo decidir si cierta actividad la hace “a veces” o “con frecuencia” y además esa valoración puede cambiar mucho de unos individuos a otros.

Aunque puede ser muy difícil precisar la frecuencia con la que se hace cierta actividad, el uso de la categoría “con frecuencia” puede englobar situaciones muy distintas en ese mismo grupo; por ejemplo, dos tipos de ejercicios que se hagan dos y cuatro veces por semana, respectivamente, son tareas que se hacen “con frecuencia” aunque la segunda se practica el doble que la primera. Esta indefinición puede ser importante a la hora de establecer algunas conclusiones.

Todos estos aspectos deben ser tenidos en cuenta tanto en los procedimientos de análisis como en las conclusiones que se obtengan.

Para tener una idea aproximada de la consistencia de las respuestas del alumnado a preguntas con una posible componente subjetiva relevante, se decidió analizar las respuestas a la pregunta *¿en qué medida te describen a ti cada una de las siguientes afirmaciones?*, de dos ítems del bloque referido a la perseverancia:

- *Cuando se me presenta un problema me rindo enseguida.*
- *Permanezco interesado en las tareas que empiezo.*

Las alternativas de respuesta son las siguientes:

“Se parece mucho a mí”, “Se parece bastante a mí”, “Se parece un tanto a mí”, “No se parece mucho a mí”, “No se parece en absoluto a mí”.

En la Tabla 3.1 aparece la distribución conjunta de las respuestas, en porcentajes, y las categorías que se consideran “muy consistentes”, “bastante consistente” “poco o nada consistentes” marcada con los colores verde, amarillo y rojo respectivamente.

Tabla 3.1. Porcentajes de respuestas a Permanezco interesado y Me rindo con facilidad

		Permanezco interesado					Total	
		Se parece	Mucho	Bastante	Un tanto	No mucho		En absoluto
Me rindo con facilidad	Mucho		1,8%	1,5%	1,6%	1,1%	7%	6,6%
	Bastante		1,4%	3,5%	3,4%	2,1%	7%	11,1%
	Un tanto		2,4%	8,8%	9,7%	4,0%	5%	25,4%
	No mucho		5,6%	15,0%	11,5%	3,1%	4%	35,7%
	En absoluto		3,4%	7,6%	3,2%	1,3%	7%	21,2%
	Total		19,5%	36,4%	29,4%	11,6%	3,0%	100,0%

Los resultados indican que el 35,9% tienen respuestas “muy consistentes”, el 42,7% “bastante consistentes”, y el 21,5% “poco o nada consistentes”.

Aunque la asignación de etiquetas es siempre discutible, parece claro que en torno al 20% del alumnado marca respuestas que pueden ser consideradas como “dudosas” en este tipo de preguntas. También resulta de interés el 42,7 % de “bastante consistentes” porque señalan la dificultad de distinguir con claridad entre categorías contiguas como, por ejemplo, “mucho” y “bastante”

También se hizo otro análisis, de este mismo tipo, referido a un bloque de preguntas cuyo enunciado es “*En relación con los conceptos matemáticos, ¿en qué medida estás familiarizado con los términos siguientes?*”, que contiene tres ítems de control, cuyos supuestos conceptos matemáticos en realidad no existen. Los porcentajes de las respuestas a los tres ítems aparecen en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Grado de familiaridad con ítems “falsos”

Ítem/Grado de familiaridad	No lo he visto nunca	Lo he visto una o dos veces	Lo he visto varias veces	Lo he visto a menudo	Lo conozco bien, entiendo el concepto
Número genuino (N=6519)	66,0%	16,2%	8,5%	5,1%	4,2%
Escala subjuntiva (N=6523)	67,8%	15,5%	8,7%	4,5%	3,5%
Fracción declarativa (N=6518)	68,9%	12,4%	8,8%	4,8%	5,1%

Se observa que la distribución de las respuestas es similar para los tres ítems, con las frecuencias más elevadas para las respuestas coherentes “No lo he visto nunca” y “Lo he visto una o dos veces”, que superan en conjunto el 81% del total. Sin embargo, no es despreciable el resultado complementario, que indica que en torno al 18% de los estudiantes manifiestan haber visto cada uno de estos términos al menos “varias veces”.

Para obtener una idea más completa de esta situación, se calcularon los porcentajes de quienes respondieron haber visto, y con qué grado, alguno de los tres términos anteriores, es decir, al menos uno de los tres.

Los resultados obtenidos indican que casi un 50% que no los ha visto nunca, un 19,6% que los ha visto una o dos veces y que hay un porcentaje significativo de estudiantes, del 30,5%, que dicen haber visto alguno de esos conceptos “al menos varias veces”.

Estos dos pequeños ejemplos nos advierten de la necesidad de extremar las precauciones a la hora de extraer conclusiones.

También habría sido muy interesante disponer de una información más detallada sobre la experiencia previa del estudiante en educación infantil, porque en la mayoría de los informes aparece como un elemento muy importante en relación al rendimiento (ver, por ejemplo, Corral y otros, 2012). En este cuestionario solo se distingue su asistencia entre las categorías “no asistió”, “sí, durante un año o menos” y “sí, durante más de un año”.

Los análisis exploratorios de los datos sirvieron de base para determinar los objetivos y procedimientos del trabajo y para recodificar algunas variables.

Las variables en las que se ha centrado el estudio son las siguientes:

ESCS. Nivel Económico-Socio-Cultural de la familia.

Experiencia en la Resolución de problemas.

Perseverancia.

Facilidad.

Estrategias de resolución.

Aprendizaje de las matemáticas.

Estrategias de estudio.

Frecuencia y tipo de ejercicios resueltos en clase.

Frecuencia y tipo de los problemas resueltos en clase.

RPRO. Rendimiento en la Resolución de Problemas de las pruebas PISA.

Las estimaciones de los parámetros asociados al rendimiento como medias, percentiles, errores estándar, etc. se hicieron siguiendo las instrucciones que aparecen en el manual de análisis de datos para usuarios de SPSS del programa PISA.

El tratamiento previo de los datos se realizó con el paquete estadístico PSPP (Proyecto GNU, 2014, <http://gnu.org/software/pspp>) utilizando guiones del manual citado. En parte del análisis exploratorio de datos se empleó el paquete estadístico SPSS 15.0. La estimación de los parámetros, la aproximación de los errores típicos, etc., se hizo mediante implementaciones (<ftp://carleos.epv.uniovi.es/pisa>) desarrolladas por los autores en el lenguaje R (Proyecto R, 2014, <http://www.r-project.org>) de los métodos descritos en el manual de análisis de datos para usuarios de SPSS del programa PISA.

Cuando se utilizaron procedimientos de inferencia estadística, como estimación por intervalos o contrastes de hipótesis, se comprobó en primer lugar si se verificaban las condiciones necesarias para garantizar la validez de los resultados.

Para intentar suavizar la posible influencia que pueden tener algunos de los problemas de subjetividad ya comentados, hemos tratado de realizar inferencias sobre grupos de estudiantes que, dentro de lo posible, fueran numerosos (en general, más de cien).

Por otra parte, para garantizar la robustez de las conclusiones hemos utilizado técnicas alternativas y comprobado que los resultados eran similares. Por ejemplo, en los análisis de regresión con predictores cualitativos ordinales, se probaron dos enfoques: usar los rangos y considerar la variable como cuantitativa para ajustar un término lineal y, a veces, otro cuadrático, o usar variables binarias 0/1 para obtener un coeficiente por cada nivel. Tras comprobar que, en ambos enfoques, los coeficientes de determinación son casi

iguales, para todos los casos, y que el significado de los modelos era el mismo, se decidió incluir el modelo de rangos por tener una expresión más sencilla.

Cabe comentar que parte de los análisis que se han realizado con factores obtenidos a partir de técnicas de reducción de la dimensión, podrían haber sido realizados con el correspondiente indicador PISA. En este sentido, la correlación entre el indicador PISA y nuestro factor principal siempre ha sido superior al 90% pero el uso de los factores calculados por nosotros permite utilizar el segundo factor y garantizar la independencia lineal entre ambos.

RESULTADOS DEL ESTUDIO

Como se ha señalado en la introducción, se han llevado a cabo múltiples estudios estadísticos para tratar de explicar de forma clara y justificada el comportamiento general del alumnado que ha respondido al cuestionario de contexto del estudio PISA 2012 CBA sobre aspectos relacionados con la resolución de problemas y el aprendizaje de matemáticas, así como con otras variables cognitivas/afectivas y el nivel económico-socio-cultural de las familias, tratando de relacionar con el rendimiento en Resolución de Problemas (RPRO). A continuación se muestran los resultados principales del trabajo.

Experiencia en resolución de problemas

Uno de los factores más importantes que presenta influencia en el aprendizaje es el conocimiento previo que posee el aprendiz (Ausubel, 1968). Aprender a resolver problemas no requiere únicamente un compromiso en su resolución, sino además actos intencionales que permitan aprender a través de la experiencia, que juega un papel fundamental en la habilidad de los estudiantes a la hora de resolver problemas (Badger y otros, 2012).

Las investigaciones llevadas a cabo por Heckman y otros (2006, 2010) desvelan que la intervención educativa puede modificar la disposición de los alumnos hacia el aprendizaje, lo cual repercute en el propio rendimiento.

A continuación, se muestra un estudio centrado en la influencia de la perseverancia, la facilidad y las estrategias seguidas por el alumnado en el rendimiento en Resolución de Problemas.

Perseverancia

Heckman (2011) apunta que determinados rasgos de la personalidad influyen a la hora de explicar el nivel educativo, los resultados laborales y el estado de salud de la población adulta. Entre ellos cabe destacar la relevancia de la perseverancia y la capacidad de trabajo y de sacrificio.

La habilidad de los estudiantes para rendir a altos niveles depende de sus creencias en cuanto a que, mientras la aptitud y el talento hacia ciertas materias puede ayudar, el dominio se alcanza sólo si los estudiantes trabajan duramente y muestran la perseverancia necesaria (OECD, 2014). En este sentido, se encuentra que estudiantes con un potencial escaso pero con gran capacidad de trabajo y perseverancia tienen más probabilidad de tener éxito que aquellos que muestran mayor talento pero capacidad baja a la hora de establecer metas ambiciosas y permanecer centrados en conseguirlas.

El informe trata de medir la perseverancia de los alumnos a partir de las respuestas obtenidas a las preguntas que se recogen en la Tabla 3.3. Un primer análisis de los datos obtenidos indica que un 56,9% del alumnado no se rinde ante los problemas, el 35,6% no suele posponer los problemas difíciles, el 55,9% sigue interesado en las tareas que inicia, el 46,6% continúa trabajando en una tarea hasta que está perfecta y el 41,6% dice hacer más de lo que se espera cuando se enfrenta a un problema.

Tabla 3.3. Porcentaje de respuestas a las preguntas del informe español PISA asociadas con la perseverancia

Preguntas	Se parece mucho a mí	Se parece bastante a mí	Se parece un tanto a mí	No se parece mucho a mí	No se parece a mí en absoluto
P.1. Cuando se me presenta un problema me rindo enseguida.	6,6%	11,2%	25,3%	35,7%	21,2%
P.2. Pospongo los problemas difíciles.	12,3%	20,9%	31,2%	24,1%	11,5%
P.3. Permanezco interesado en las tareas que empiezo.	19,5%	36,4%	29,5%	11,6%	3,0%
P.4. Sigo trabajando en una tarea hasta que todo está perfecto.	17,9	28,7%	28,7%	19,8%	4,9%
P.5. Cuando se me presenta un problema, hago más de lo que se espera de mí.	16,3%	25,3%	33,1%	20,4%	4,8%

La forma en que están formuladas las preguntas uno y dos respecto al resto y la inconsistencia detectada en el marco metodológico, aconseja analizar con detalle qué factores pueden explicar la asociación entre estos ítems y el origen de la variabilidad en las respuestas. Por ello se realizó un análisis de componentes principales sobre la matriz de correlaciones asociada a las cinco preguntas anteriores y se obtuvieron dos factores que explican aproximadamente el 70,3% de la variabilidad global.

El primer factor es un indicador de la “Perseverancia global” dado que asocia puntuaciones negativas a los estudiantes que muestran falta de perseverancia, mientras que toma valores positivos para los que no se rinden ante las situaciones difíciles.

El segundo factor asigna puntuaciones negativas a quienes tienden a seleccionar, en todas las preguntas, las respuestas del tipo “se parece a mí”, mientras que toma valores positivos para los que actúan de manera contraria, es decir, tienden a elegir “no se parece a mí”. Por otra parte, los estudiantes con un grado de perseverancia claramente definido, sea alto o bajo, ocupan las posiciones centrales de esta variable. Por lo tanto este factor refleja la “Consistencia en la Percepción de la Perseverancia”.

La “Perseverancia global” presenta una relación creciente tanto con las variables de Rendimiento como con el nivel económico–socio-cultural, como se puede apreciar en la Tabla 3.4. En este sentido se puede consultar el trabajo “Factores determinantes del Rendimiento en resolución de problemas” realizado por Ildelfonso Méndez, que está incluido en este volumen.

En Resolución de Problemas, la puntuación se sitúa un poco por encima de los 460 puntos entre quienes tienen una perseverancia baja o muy baja, y asciende sistemáticamente hasta alcanzar un promedio de 504 puntos entre quienes tienen un nivel alto. Esta conclusión es coincidente con la de numerosos trabajos como el desarrollado por Greene y otros (2004).

Tabla 3.4. Puntuaciones medias en el rendimiento según la “Perseverancia global”

Categorías	Muy Baja	Baja	Media	Alta	Muy alta
RPRO Media (N=6565) Error típico	463,97 5,71	465,78 5,92	471,57 5,79	489,78 5,47	503,14 5,78
ESCS Media (N=6552) Error típico	-0,314 0,050	-0,293 0,042	-0,133 0,050	-0,181 0,059	-0,007 0,060

Por otra parte, la “Consistencia de la Perseverancia” no mantiene una relación creciente con el rendimiento (Tabla 3.5), ya que las puntuaciones medias tienden a dibujar una parábola que alcanza su máximo en el intervalo (60–80], asociado con las respuestas “no se parece a mí” en las dos primeras preguntas y “se parece a mí” en las restantes. Un aspecto interesante es la diferencia de comportamiento entre las dos clases extremas, ya que las personas que tienden a elegir como respuestas “se parece a mí” tienen menor rendimiento medio que aquellas que tienden a elegir las respuestas “no se parece a mí”.

Tabla 3.5. Puntuaciones medias en el rendimiento según la “Consistencia en la Perseverancia”

Percentiles	[0, 20]	(20, 40]	(40, 60]	(60, 80]	(80, 100]
RPRO Media (N=6568) Error típico	456,27 6,23	478,19 5,54	487,70 4,97	494,32 5,82	477,01 6,35
ESCS Media (N=6552) Error típico	-0,221 0,047	-0,213 0,050	-0,144 0,045	-0,128 0,051	-0,231 0,059

Estos resultados señalan que al medir la perseverancia con las preguntas del cuestionario es necesario aplicar una corrección que tenga en cuenta la consistencia de las respuestas. Por lo tanto, a la hora de evaluar la importancia de la perseverancia en el rendimiento es necesario considerar tanto el valor global como la consistencia. Para medir de manera más objetiva el interés de la consistencia se plantean dos modelos de regresión cuya única diferencia es la participación de esta variable.

Modelo 1

El modelo obtenido al predecir el rendimiento en la Resolución de problemas en función de la perseverancia permite explicar el 2,5% de la variabilidad y tiene la siguiente estructura:

$$RPRO = 478,6 + 16,2 \text{ Perseverancia},$$

donde los errores típicos de los coeficientes son:

$$ET(\text{Constante})=4,2; ET(\text{Perseverancia})=2,2.$$

Modelo 2

Al incluir la variable Consistencia, antes comentada, con la forma cuadrática el porcentaje de variabilidad explicada asciende al 4,7% y tiene la siguiente estructura:

$$RPRO = 486,8 + 14,8 \text{ Perseverancia} + 6,6 \text{ Consistencia} - 8,2 \text{ Consistencia}^2$$

Los errores típicos de los coeficientes son:

$$ET(\text{Constante})=4,3; ET(\text{Perseverancia})=2,2;$$

$$ET(\text{Consistencia})= 2,1; ET(\text{Consistencia}^2)= 1,1.$$

El valor de la consistencia a partir del cual su aportación al RPRO pasa de ser creciente a decreciente es 0,40, aproximadamente; esta puntuación corresponde al percentil 64 que casi está en la frontera entre las categorías segunda y tercera (Tabla 3.5). Además, en estas variables el mayor rendimiento está asociado a quienes tienen una perseverancia global alta y una consistencia en torno a 0,40.

Por otra parte, el resultado obtenido es concluyente al señalar que la perseverancia y la consistencia tienen el mismo poder explicativo del rendimiento en la Resolución de Problemas.

El Informe Español PISA 2012 Vol. I, refleja una importante brecha entre el rendimiento de quienes han repetido algún curso y los que no, que también se relaciona con otras variables importantes como el nivel económico-socio-cultural. Aunque la repetición de curso no forma parte de los objetivos de este trabajo, nos ha parecido interesante describir en este colectivo otras características como la perseverancia, que es siempre menor en los repetidores salvo en aquellos que responden “hago más de lo que se espera de mí”. Esta acumulación de circunstancias negativas en el colectivo de estudiantes repetidores da una idea de la importancia del problema y de la dificultad de encontrar una solución.

Tabla 3.6. Relación entre Perseverancia y Repetición de curso

Perseverancia	No Repetidores	Repetidores
Me rindo con facilidad	15,5%	24,1%
Retraso los problemas	34,2%	31,5%
Permanezco interesado	58,5%	49,0%
Trabajo hasta dejarlo perfecto	49,1%	39,9%
Hago más de lo que se espera de mí	41,8%	48,0%

En cuanto a la variable sexo, las diferencias son casi irrelevantes, como se apuntaba en el Informe Español 2012 Vol. I.

Otro aspecto a destacar es que la Consistencia de la Perseverancia no presente diferencias relevantes respecto al nivel económico-socio-cultural o con la repetición de curso.

Facilidad en la resolución de problemas

El concepto que se estudia en este apartado aborda dos de las dimensiones clásicas de resolución de problemas consideradas por Schoenfeld (1992): la emocional y la metacognoscitiva. La dimensión emocional es la actitud que muestra el alumno ante una situación de resolución de problemas y las reacciones que provoca en él. Por lo tanto, engloba el sentimiento positivo/negativo que le inspire la actividad y los actos que se sientan impulsados a seguir. La dimensión metacognoscitiva se refiere al conocimiento que el propio alumno tenga sobre su propio conocimiento, lo que lo llevará a tener una percepción de la demanda cognitiva que pueda llevar a cabo.

Entre las cinco preguntas recogidas en el cuestionario y mostradas en la Tabla 3.7, la tercera y la quinta están referidas a la dimensión emocional mientras que las otras tres se refieren a la metacognoscitiva.

Tabla 3.7. Preguntas del cuestionario sobre la facilidad en la Resolución de problemas

	Se parece mucho a mí	Se parece bastante a mí	Se parece un tanto a mí	No se parece mucho a mí	No se parece a mí en absoluto	Total
Puedo manejar un montón de información	18,8%	32,9%	34,6%	11,7%	2,0%	100%
Soy rápido entendiendo cosas	20,5%	34,3%	29,8%	12,6%	2,8%	100%
Busco explicaciones para las cosas	30,0%	35,3%	24,9%	8,2%	1,6%	100%
Puedo relacionar con facilidad unos hechos con otros	24,8%	35,6%	28,1%	9,7%	1,8%	100%
Me gusta resolver problemas complejos	13,8%	16,3%	26,9%	26,0%	17,0%	100%

La facilidad o la disposición del alumnado para enfrentarse a un nuevo problema matemático se relaciona fuertemente con el rendimiento del alumno según el informe PISA de 2012 (PISA 2012, Vol.3, cap.3).

Los resultados que aparecen en la Tabla 3.8 ratifican que, cuanto más alta es la facilidad en la Resolución de Problemas del alumnado, tanto mayores son las puntuaciones que obtienen en la prueba de Resolución de Problemas. Sin embargo, como apuntaba el informe PISA de 2012, Vol.3, una mayor capacidad natural no garantiza alcanzar un alto rendimiento, ya que ello requiere esfuerzo y constancia en el estudio.

Tabla 3.8. Medias del rendimiento en función de la facilidad

		Facilidad en la Resolución de problemas				
		Muy Baja	Baja	Media	Alta	Muy Alta
RPRO	Media	445,15	474,42	490,53	499,34	509,40
	Error típico	5,83	5,00	5,36	6,52	7,19

Un aspecto a destacar es que, a pesar de lo que a veces pueda parecer, los alumnos con mayor facilidad para la Resolución de Problemas también presentan una mayor perseverancia (Tabla 3.9).

Tabla 3.9. Medias de perseverancia en función de la facilidad

		Facilidad en la Resolución de problemas				
		Muy Baja	Baja	Media	Alta	Muy Alta
Perseverancia	Media	-0,481	-0,166	0,074	0,309	0,754
	Error típico	0,026	0,035	0,037	0,051	0,038

Por otra parte, hay una relación claramente creciente entre el nivel económico-socio-cultural familiar y la percepción que manifiestan los estudiantes sobre su facilidad para la Resolución de Problemas, tal y como se pone de manifiesto en la Tabla 3. 10.

Tabla 3.10. Medias de ESCS en función de la facilidad

		Facilidad en la Resolución de problemas				
		Muy Baja	Baja	Media	Alta	Muy Alta
ESCS	Media	-0,439	-0,251	-0,129	-0,035	0,108
	Error típico	0,038	0,050	0,048	0,056	0,059

Por otra parte, es interesante destacar que la asociación entre la Facilidad y la Perseverancia Global, medida con la correlación de Pearson ($r=0,450$), es mayor que con el Rendimiento ($r=0,233$) y con el nivel Económico-Socio-Cultural ($r= 0,244$).

La combinación de estos tres análisis resalta la importancia que tiene fomentar tanto en casa como en la escuela el trabajo constante entre los estudiantes, especialmente entre los que pertenezcan a familias con menor nivel económico-socio-cultural. Para conocer con más detalle el comportamiento de este grupo de estudiantes se puede consultar el trabajo titulado “Superando las barreras: Factores determinantes del Rendimiento en escuelas y estudiantes con un entorno desfavorable”, realizado por Cordero et al., que se encuentra en este mismo volumen, y en el que se analizó cómo aislar la influencia del nivel económico-socio-cultural (ESCS) para estudiar qué variables pueden disminuir su impacto.

En general resulta muy difícil modificar las características sociales-culturales del entorno familiar y por ello resulta tan importante actuar sobre aquellos aspectos que sean más sencillos de cambiar. Por ejemplo, fomentar la perseverancia en los niños desde la educación infantil puede aumentar su implicación en las tareas y obtener una mejora real de su rendimiento.

Respecto a la relación de la facilidad con el sexo del alumnado, las chicas tienden a considerar que tienen menos facilidad que los chicos en la resolución de problemas, especialmente en la rapidez de aprendizaje y el gusto por resolver problemas difíciles (ver Tabla 3.11).

Tabla 3.11. Respuestas “Se parece mucho a mí” y “Se parece bastante a mí” por sexos

	“Se parece a mucho mí” o “Se parece a bastante mí”	
	Chico	Chica
Puedo manejar un montón de información	57,5%	45,9%
Soy rápido entendiendo cosas	61,6%	52,1%
Busco explicaciones para las cosas	64,9%	65,7%
Puedo relacionar con facilidad unos hechos con otros	64,0%	56,9%
Me gusta resolver problemas complejos	36,7%	23,6%

Estrategias en la resolución de problemas

Para tratar de averiguar qué procedimientos de resolución de problemas utiliza el alumnado en el cuestionario de contexto de PISA, se formularon tres problemas que ocurren con frecuencia en la vida cotidiana y se plantearon varias estrategias de resolución compatibles.

El enunciado y las alternativas de respuesta de cada problema se muestran en las Tablas 3.12, 3.13 y 3.14, respectivamente.

Tabla 3.12. Preguntas del cuestionario sobre estrategias de resolución 1

Supón que has estado enviando mensajes texto desde tu móvil varias semanas. Hoy, sin embargo, no puedes enviar mensajes de texto. Quieres intentar resolver el problema. ¿Qué harías?					
Elige para cada sugerencia la opción que más se parece a ti	Lo haría seguro	Lo haría probablemente	No lo haría probablemente	Seguro que no lo haría	Total
Pulso todas las teclas posibles para descubrir qué va mal	21,6%	30,7%	25,4%	22,4%	100%
Pienso en qué podría haber causado el problema y qué puedo hacer para resolverlo	39,2%	46,9%	11,0%	2,9%	100%
Me leo el manual de instrucciones	14,1%	21,3%	31,0%	33,6%	100%
Le pido ayuda a un amigo	32,5%	45,5%	15,3%	6,7%	100%

Tabla 3.13. Preguntas del cuestionario sobre estrategias de resolución 2

Supón que estás planeando una excursión al zoo con tu hermano. No sabes el camino para llegar. ¿Qué harías?					
Elige para cada sugerencia la opción que más se parece a ti	Lo haría seguro	Lo haría probablemente	No lo haría probablemente	Seguro que no lo haría	Total
Me leo el folleto del zoo para ver si dice cómo ir hasta allí	45,1%	38,7%	10,5%	5,7%	100%
Estudio un mapa para encontrar la mejor ruta	24,7%	35,2%	27,9%	12,2%	100%
Dejo que sea mi hermano quien se preocupe por cómo llegar allí	8,8%	21,3%	37,7%	32,2%	100%
Sé más o menos dónde está, así que le sugiero simplemente que arranquemos el coche	23,0%	43,3%	24,2%	9,6%	100%

Tabla 3.14. Preguntas del cuestionario sobre estrategias de resolución 3

Supón que llegas a la estación de tren. Hay una máquina para obtener el billete que nunca habías usado. Quieres comprar un billete. ¿Qué harías?					
Elige para cada sugerencia la opción que más se parece a ti	Lo haría seguro	Lo haría probablemente	No lo haría probablemente	Seguro que no lo haría	Total
Compruebo en qué se parece a otras máquinas que sí había usado	33,3%	47,7%	14,4%	4,6%	100%
Pruebo todos los botones para ver qué sucede	12,7%	21,8%	36,9%	28,6%	100%
Pido ayuda a alguien	31,0%	43,9%	18,1%	7,0%	100%
Intento encontrar una taquilla en la estación para comprar un billete	33,7%	43,1%	17,4%	5,9%	100%

En general el alumnado suele decantarse por una combinación de dos o tres estrategias que varían de unos problemas a otros y, en cada caso, suele haber una de ellas que resulta claramente minoritaria.

Las preferencias del alumnado en los distintos problemas fueron las siguientes:

En el problema del mensaje de texto (Tabla 3.12) la actuación más común es “reflexionar sobre el problema” (alternativa 2), con un 86,1% de respuestas en las categorías “lo haría seguro” o “lo haría probablemente”, mientras que la opción “leer el manual” solo se elige en el 35,4% para esas categorías.

En el problema de selección de una ruta (Tabla 3.13), el 83,8% optaría seguro o probablemente por “leer el folleto” y solamente el 30,1% opta por la solución cómoda y “le dejaría el problema a su hermano”.

Para el problema de expedición de billetes en una máquina (Tabla 3.14), las alternativas “pedir ayuda”, “buscar una taquilla” y “comprobar si se parece a otra máquina” obtienen unos porcentajes muy altos de elección segura o probable, con valores superiores al 70%, y la opción “tocar los botones” se reduce al 34,5%.

Para tener una idea global de las estrategias que prefiere el alumnado y facilitar la interpretación de los resultados hemos clasificado cada una de las alternativas de actuación de la siguiente forma:

- **Inmediata:** se da una respuesta irreflexiva ante el problema sin hacer un análisis de los factores involucrados (tocar todos los botones).
- **Cómoda:** se delega la respuesta al problema en otros (pedir ayuda a un amigo).
- **Metódica:** se sigue un plan de trabajo establecido (leer el manual).
- **Reflexiva:** se analizan los factores involucrados en el problema y se intenta obtener una respuesta óptima (estudiar un mapa para encontrar la mejor ruta).

Posteriormente se trató de determinar las estrategias que mejor caracterizan a cada estudiante sumando las puntuaciones asignadas a cada tipo. Finalmente, se aplicó un análisis de componentes principales sobre la matriz de correlaciones de las nuevas variables, obteniéndose dos factores significativos que explican, casi por igual, el 66% de la variabilidad total.

El primer factor tiende a separar a las personas que combinan un número grande de estrategias de quienes prefieren utilizar pocas alternativas. En este sentido cabe destacar que casi el 99% del alumnado eligió al menos una de las estrategias con los niveles “lo haría seguro” o “lo haría probablemente”. Por su construcción, este factor refleja el grado con que el alumnado tiende a combinar más o menos estrategias a la hora de abordar los problemas aunque sin tener en cuenta el tipo de estrategias que prefiere. El alumnado “haría seguro” o “haría probablemente” las cuatro opciones, en cada uno de los tres problemas, con unos porcentajes del 12%, el 9% y el 20% respectivamente.

En las variables Rendimiento, Perseverancia, Facilidad y ESCS, la mayor variación respecto a los niveles de este factor se produce en el caso del Rendimiento, donde los alumnos que se decantan por usar todas las estrategias tienden a tener menores puntuaciones que el resto (Tabla 3.15). Por otra parte, parece que quienes prefieren muchas estrategias tienden a ser más perseverantes y consideran que tienen mayor facilidad en la resolución de problemas, aunque en estos casos las diferencias no son casi significativas.

Este factor, si se analiza de manera aislada, debe ser interpretado con mucha precaución porque, como ya se comentó, sólo se refiere al número de estrategias sin tener en cuenta cuáles son. El interés real de este factor surge cuando se combina su interpretación con el segundo, que pasamos a comentar a continuación.

Tabla 3.15. Relación entre el Rendimiento en Resolución de Problemas y ESCS con el grado de combinación de estrategias

Número de estrategias		RPRO	Perseverancia	Facilidad	ESCS
Muy baja	Media	482,60	-0,144	-0,035	-0,158
	Error típico	6,44	0,049	0,041	0,051
Baja	Media	492,13	-0,053	-0,042	-0,163
	Error típico	5,44	0,037	0,035	0,050
Media	Media	479,62	-0,019	-0,054	-0,202
	Error típico	6,20	0,043	0,036	0,053
Alta	Media	480,93	0,081	0,055	-0,152
	Error típico	5,66	0,041	0,041	0,048
Muy Alta	Media	460,83	0,140	0,208	-0,271
	Error típico	6,04	0,037	0,033	0,050

El segundo factor tiene un significado mucho más interesante, ya que contrapone a quienes prefieren una respuesta Rápida-Cómoda, con valores negativos, frente a los que se decantan por una estrategia Reflexiva-Metódica. Gracias a este factor obtenemos que el tipo de estrategia que prefieren los estudiantes da lugar a diferencias importantes y sistemáticas en el rendimiento.

Tabla 3.16. Medias del rendimiento, la perseverancia, la facilidad y ESCS según el grado de uso de la estrategia Reflexiva-Metódica

Estrategia		RPRO	Perseverancia	Facilidad	ESCS
Reflexiva-Metódica					
Muy baja	Media	450,64	-0,209	-0,211	-0,269
	Error típico	5,23	0,042	0,038	0,050
Baja	Media	457,37	-0,193	-0,177	-0,299
	Error típico	6,97	0,036	0,044	0,050
Media	Media	473,09	-0,077	-0,011	-0,208
	Error típico	6,34	0,042	0,034	0,053
Alta	Media	492,86	-0,106	0,077	-0,145
	Error típico	4,80	0,035	0,031	0,057
Muy Alta	Media	514,10	0,332	0,408	-0,055
	Error típico	5,28	0,039	0,035	0,052

Tanto la perseverancia global como la facilidad tienen una relación creciente con la estrategia Reflexiva-Metódica, tal y como se puede apreciar en la Tabla 3.16, ya que las medias de ambas variables tienen una tendencia claramente creciente. Por ejemplo, quienes menos se paran a reflexionar, es decir, prefieren una estrategia Inmediata-Cómoda

(alternativa a la Reflexiva-Metódica en el segundo factor), tienen unas medias de -0,216 en perseverancia y -0,215 en facilidad, que ascienden hasta 0,341 y 0,435, respectivamente, para los que optan en mayor medida por una acción Reflexiva-Metódica.

Al analizar globalmente la experiencia del alumnado en la resolución de problemas de la vida cotidiana se aprecia que todos los factores considerados están claramente relacionados entre sí y a su vez con el rendimiento. Por ejemplo, el alumnado con un nivel económico-social-cultural familiar más alto tiende a tener más perseverancia, mayor facilidad percibida y utiliza la estrategia Reflexiva-Metódica con más frecuencia que quienes proceden de un estatus familiar menos favorecido. Un estudio más profundo de este colectivo de alumnos se puede consultar en el trabajo de Cordero, Pedraja y Simancas incluido en este mismo informe (ver Cordero y otros, 2014).

Para cuantificar de manera más clara todo este conjunto de relaciones se planteó un modelo de regresión para predecir el rendimiento utilizando el ESCS y las variables que miden la perseverancia, la facilidad y la estrategia preferida en la resolución de problemas cotidianos.

El modelo que se obtiene es capaz de predecir el 18% de la variabilidad del rendimiento ($R^2=0,18$) y presenta la siguiente estructura:

$$\text{RPRO} = 495,97 + 24,26 \text{ ESCS} + 19,67 \text{ Facilidad} + 3,89 \text{ Consistencia} - 7,40 \text{ Consistencia}^2 \\ + 15,68 \text{ Reflexiva-Metódica} - 8,26 \text{ CEstrategias} - 4,96 \text{ CEstrategias}^2.$$

Los errores típicos de los coeficientes de las variables son:

$$\text{ET}(\text{Constante})=4,06; \text{ET}(\text{ESCS})= 2,99; \text{ET}(\text{Facilidad})= 1,90;$$

$$\text{ET}(\text{Consistencia})= 1,89; \text{ET}(\text{Consistencia}^2)= 1,04; \text{ET}(\text{Reflexiva-Metódica})= 1,78;$$

$$\text{ET}(\text{CEstrategias})= 2,11; \text{ET}(\text{CEstrategias}^2)= 1,38.$$

En el modelo, “CEstrategias = Combinación de estrategias” y “Consistencia = Consistencia en la respuestas a los ítems de perseverancia”.

Un aspecto interesante de este resultado es que la perseverancia global no aparece en el modelo, dado que su coeficiente de regresión vale 1,38 y el error típico 2,39 y, por lo tanto, no es significativamente distinto de cero. Esto se debe a que la información que aporta sobre el rendimiento está recogida en las variables Estrategia Reflexiva-Metódica, Consistencia y Facilidad.

El aprendizaje de las matemáticas

La evaluación de las matemáticas tiene especial relevancia en las pruebas PISA 2012, ya que es el área de conocimiento que se examina con mayor detalle y precisión. En concreto, se persigue la evaluación de la competencia matemática del alumnado analizando la manera en la que utilizan lo que han aprendido previamente para resolver los problemas que les van surgiendo en experiencias del mundo real y construir nuevos aprendizajes.

Según el modelo de Biggs (1994), el aprendizaje resulta de la interrelación de tres elementos claves: la intención (motivación) de quien aprende, el proceso que utiliza (estrategia), y los logros que obtiene (rendimiento). Por tanto, aparte de las actitudes ante el estudio, también es necesario evaluar cuáles son las estrategias de aprendizaje utilizadas por el alumnado y su influencia a la hora de comprender y resolver ejercicios y problemas que se proponen en clase.

En este apartado se estudiarán los siguientes aspectos relacionados con la experiencia que tienen el alumnado en el aprendizaje de las matemáticas:

- Estrategias de aprendizaje
- Frecuencia y tipos de ejercicios de matemáticas que se trabajan en clase
- Frecuencia y clase de problemas de matemáticas que resuelven en clase

Estrategias de aprendizaje en matemáticas

En este apartado seguiremos el esquema *llevado a cabo* empleado en el informe español PISA 2012, centrado en analizar las cuestiones enfocadas a conocer la frecuencia con la que los estudiantes emplean distintas estrategias en su estudio cotidiano.

Estas estrategias se clasifican en tres patrones generales:

- Estrategias de **control** (EC): el alumno controla el proceso de aprendizaje y determina en cada momento lo que necesita saber y aquello que desconoce.
- Estrategias de **reflexión-relación** (ER): el estudiante reflexiona sobre lo que estudia y busca relacionar esos conocimientos con otras asignaturas o con la vida real.
- Estrategia **memorística** (EM): el estudiante basa su aprendizaje, sobre todo, en memorizar los conceptos y repetir los ejercicios propuestos en clase.

En cada uno de las cuatro situaciones de la Tabla 3.17, la primera respuesta se corresponde con estrategias de control, la segunda con estrategias de reflexión-relación, y la última de ellas con estrategias memorísticas.

Tabla 3.17. Preguntas del cuestionario sobre estrategias de aprendizaje en matemáticas

Preguntas	
En cada apartado el alumno debe escoger una de entre las tres opciones	
1	<p>Cuando estudio para un examen de matemáticas, intento determinar qué es lo más importante.</p> <p>Cuando estudio para un examen de matemáticas, intento entender nuevos conceptos relacionándolos con cosas que ya sé.</p> <p>Cuando estudio para un examen de matemáticas, me aprendo de memoria todo lo que puedo.</p>
2	<p>Cuando estudio matemáticas, intento darme cuenta de qué conceptos no he entendido todavía del todo.</p> <p>Cuando estudio matemáticas, pienso en distintos modos de hallar la respuesta.</p> <p>Cuando estudio matemáticas, repaso para ver si recuerdo lo que ya he estudiado.</p>
3	<p>Cuando estudio matemáticas, empiezo pensando exactamente qué necesito aprender.</p> <p>Cuando estudio matemáticas, intento relacionar lo que estudio con cosas que he aprendido en otras asignaturas.</p> <p>Cuando estudio matemáticas, repito tan a menudo algunos problemas que siento que los podría resolver dormido.</p>
4	<p>Cuando no entiendo algo en matemáticas, siempre busco más información para aclarar el problema.</p> <p>Pienso en cómo pueden ser útiles en la vida cotidiana las matemáticas que he aprendido.</p> <p>Para recordar el método para resolver un problema de matemáticas, me miro los ejemplos una y otra vez.</p>

En la situación 1 se analiza la preferencia de estrategia del alumnado a la hora de preparar un examen. Según se indica en la Tabla 3.18, cabe destacar que la estrategia más frecuente en la preparación de un examen es la de controlar lo que se desconoce (41,9%), aunque este porcentaje es similar al de estudiantes que tratan de relacionar sus conocimientos con otras asignaturas o con la vida real (38,2%).

Tabla 3.18. Porcentaje de estudiantes que siguen diferentes estrategias de aprendizaje de matemáticas

Situación/ Estrategia	Control	Relación	Memoria	Total
1	41,9%	38,2%	19,9%	100%
2	45,2%	20,5%	34,3%	100%
3	51,4%	19,2%	29,4%	100%
4	22,0%	16,0%	62,0%	100%

Las preguntas de la situación 2 no tienen un contexto tan claramente definido como el bloque anterior aunque, en este caso, parecen dirigirse a establecer el modo cotidiano de trabajar del alumnado. Un primer análisis según la Tabla 3.18 nos lleva a concluir que la estrategia mayoritaria en el estudio cotidiano es controlar qué contenidos de la materia no se tienen bien asimilados (45,2%) o bien repasar lo ya estudiado (34,3%).

La situación 3 tiene bastantes elementos comunes con *el bloque* la 2 aunque, en este caso, las preguntas parecen dirigirse a determinar qué estrategia sigue el alumnado para establecer los objetivos del estudio. La estrategia mayoritaria de los estudiantes según los datos de la Tabla 3.18 es tratar de determinar, lo más exactamente posible, lo que necesitan aprender (51,4%) y sólo un porcentaje pequeño (19,2%) pretende relacionar las matemáticas con otras asignaturas.

Los ítems de respuestas de la situación 4 son bastante heterogéneos ya que, por ejemplo, mientras la primera se plantea cómo aclarar o resolver algún concepto que no se ha entendido bien, la tercera se refiere a cómo interiorizar los métodos de resolución de problemas. El nexo que hemos encontrado entre estas cuestiones es determinar cómo actúa el alumnado para asimilar-fijar los conceptos o métodos: en la primera alternativa buscan más información para controlar el problema, en la segunda buscan alguna conexión con la vida real y en la tercera se basan en la repetición. La estrategia claramente mayoritaria que se observa en la Tabla 3.18 es la de repetir los problemas o ejercicios tantas veces como sea necesario (62%) y resultan claramente minoritarios quienes tratan de relacionar las matemáticas con la vida cotidiana (16%).

En cuanto a la diferencia entre chicos y chicas, los porcentajes para los cuatro bloques de respuestas y los tres perfiles de estrategias se recogen en la Tabla 3.19. En la preparación del examen (bloque 1) se han detectado diferencias pequeñas, aunque significativas, ya que las chicas tienden a relacionar más los contenidos (40,2%) y emplean menos la memoria (18,2%), mientras que en los chicos esos porcentajes se corresponden con un 36,3% y un 21,6%, respectivamente.

En la situación 2, relacionado con el estudio cotidiano, los chicos recurren más a relacionar con otras cosas (25%) que las chicas (16%), aunque no se preocupan tanto de controlar lo que no entienden bien o de repasar lo que ya estudiaron.

En relación con la situación 3, el objetivo mayoritario en ambos sexos es determinar lo que se necesita aprender, con porcentajes ligeramente superiores al 50%. Sólo se aprecia una pequeña diferencia en que los chicos optan algo más por relacionar con otras asignaturas (21%) que las chicas (17%).

Finalmente, ante las alternativas de la situación 4, las chicas y los chicos presentan algunas diferencias apreciables ya que ellas prefieren la opción memorística (67% frente al 57,1% de los chicos); sin embargo, en el caso de buscar la relación de las matemáticas con la vida cotidiana, las chicas lo hacen con un porcentaje de 11,9%, mientras que en los chicos ese porcentaje asciende al 20%.

Tabla 3.19. Porcentaje de estudiantes según sexo (H/M) que siguen diferentes estrategias de aprendizaje de matemáticas

Estrategia Situación	Control		Relación		Memoria	
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
1	42,1%	41,6%	36,3%	40,2%	21,6%	18,2%
2	42,6%	47,7%	25,0%	16,0%	32,4%	36,3%
3	21,3%	17,0%	50,6%	52,3%	28,1%	30,7%
4	57,1%	67,0%	20,0%	11,9%	22,9%	21,1%

En último lugar de este apartado se analiza el rendimiento en la Resolución de Problemas en función de las estrategias ya comentadas (Tabla 3.17). Los resultados se recogen en la Tabla 3.20.

Tabla 3.20. Medias del rendimiento en Resolución de Problemas según diferentes estrategias de aprendizaje y situaciones de estudio

Situación / Estrategia		Control	Relación	Memoria
1	Media	471,22	495,18	446,80
	Error típico	4,86	4,56	5,74
2	Media	481,45	466,94	473,63
	Error típico	4,37	5,57	5,01
3	Media	473,40	481,00	476,05
	Error típico	4,22	6,01	5,27
4	Media	478,62	470,73	476,13
	Error típico	6,39	5,55	4,23

Al comparar el rendimiento en la Resolución de Problemas según la forma de preparar los exámenes (situación 1), se observa que quienes optan por la reflexión-relación de conocimientos obtienen un promedio de puntuación en su rendimiento de 495,18 puntos, claramente superior a los 471,22 puntos de media para los que utilizan estrategias de control. Además, el estudio de las matemáticas basado en la memoria resulta ser muy ineficiente, con una media de 446,80 puntos.

En el estudio cotidiano (situación 2) también aparecen algunas diferencias, aunque muy pequeñas, sobre la estrategia que parece resultar más efectiva en la resolución de problemas. La puntuación más alta corresponde a quienes dan prioridad a saber sus puntos débiles con 481,45 puntos, mientras que las otras dos estrategias obtienen puntuaciones similares en torno a los 470 puntos. Este resultado marca una diferencia clara entre la preparación concreta de un examen y el estudio diario, ya que en el primer caso lo óptimo parece ser tratar de relacionar cosas y en el segundo es controlar lo que no se entiende bien.

La situación 3 replica prácticamente los resultados obtenidos en la situación 2 en las puntuaciones para cada tipo de estrategia, ya que las diferencias entre los grupos no resultan estadísticamente significativas.

Por último, en la situación 4 las diferencias entre las tres estrategias de aprendizaje de las matemáticas no tienen relevancia significativa, aunque este resultado podría deberse, sobre todo, a la heterogeneidad o indefinición del contexto en que se hacen las preguntas.

Un aspecto interesante se centra en determinar si las estrategias de resolución de problemas están relacionadas con las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Para ello se comparan las puntuaciones del factor reflexivo-metódico analizado en la sección 1.3 (que asignaba valores positivos a los perfiles Reflexivo y Metódico, y valores negativos a los perfiles Cómodo e Inmediato) con las diferentes estrategias de aprendizaje en matemáticas planteadas anteriormente (Control-Relación-Memoria).

Como puede verse en la Tabla 3.21, en el caso de la preparación de un examen (situación 1) el factor reflexivo-metódico replica exactamente los resultados obtenidos con el rendimiento (Tabla 3.20); es decir, la media del factor es mayor para la estrategia “Relación” (0,1853), seguido de “Control”(-0,0084) y por último “Memoria”(-0,2212).

En el resto de las situaciones la asociación entre las estrategias de aprendizaje de matemáticas y el factor reflexivo-metódico en la Resolución de Problemas no tiene una estructura tan clara aunque, en general, el factor tiende a tener una media mayor en la estrategia de matemáticas óptima en relación con el rendimiento en resolución de problemas.

Tabla 3.21. Puntuaciones medias del factor estrategia Reflexiva-Metódica en Resolución de Problemas según los distintos bloques y las estrategias de aprendizaje de matemáticas

Situaciones / Estrategia		Control	Relación	Memoria
1	Media	-0,008	0,185	-0,221
	Error típico	0,031	0,048	0,054
2	Media	0,086	0,085	-0,119
	Error típico	0,031	0,058	0,039
3	Media	0,036	0,130	-0,096
	Error típico	0,029	0,065	0,040
4	Media	-0,045	0,091	0,142
	Error típico	0,050	0,066	0,025

Los resultados obtenidos a lo largo de esta sección indican que las estrategias de aprendizaje de las matemáticas y las estrategias seguidas en la vida cotidiana tienen muchos aspectos en común. Así, se ha podido comprobar que, en cada una de las cuatro situaciones analizadas, la estrategia de matemáticas que tenía mayor puntuación media en el factor reflexivo-metódico, en la Resolución de Problemas, también tendía a obtener mayor rendimiento.

En un lenguaje coloquial podría concluirse que el alumnado con mayor capacidad de reflexión y método de trabajo tiende a estudiar de acuerdo a las estrategias que producen mejores resultados.

Ejercicios resueltos en clase

En el cuestionario de contexto se pregunta a los estudiantes sobre la frecuencia con que resuelven ejercicios matemáticos de carácter teórico y aplicado.

Los resultados que aparecen en la Tabla 3.22 indican que los ejercicios de matemática pura (ecuaciones - ítems 5, 7 y 9) los hacen “con frecuencia” en torno al 73 % de los alumnos, “a veces” en torno al 20%, “raras veces” el 5% y “nunca” el 2,5%. Los

ejercicios de matemática aplicada (el resto de ítems) son bastante menos frecuentes ya que la categoría “con frecuencia” pasa a estar en ellos alrededor del 20%, con un descenso de unos cincuenta puntos respecto a la misma frecuencia para el otro tipo de ejercicios, mientras que asciende el porcentaje del resto de categorías.

Al comparar los resultados del rendimiento en Resolución de Problemas según la frecuencia con las que se resuelven los diferentes tipos de ejercicios se aprecia con claridad una diferencia sistemática y muy importante entre los de ejercicios de matemática pura y aplicada (Tabla 3.23).

Al estudiar el rendimiento según la frecuencia con que se realizan las tareas de matemática pura, se aprecia que las puntuaciones más altas corresponden siempre a la categoría “con frecuencia”, con una media en torno a 490 puntos, que desciende claramente para el resto de frecuencias.

En matemática aplicada la situación cambia completamente, ya que ahora las puntuaciones más altas se obtienen entre los estudiantes que hacen este tipo de tareas “algunas veces” o “rara vez”, con medias alrededor de 480 puntos, mientras que quienes las hacen “con frecuencia” el valor medio suele estar en torno a 460 puntos. El resultado correspondiente a quienes no los hacen nunca tiene una variabilidad grande, con valores entre 440 y 480 puntos.

Tabla 3.22. Porcentajes de frecuencia de realización de los distintos tipos de ejercicios

	Con frecuencia	Algunas veces	Rara vez	Nunca	Total
Calcular a partir de un horario de trenes cuánto tiempo se necesita para ir de una ciudad a otra	17,9%	48,3%	25,0%	8,8%	100%
Calcular cuánto aumenta el precio de un ordenador al sumarle los impuestos	20,8%	47,2%	23,5%	8,5%	100%
Calcular cuántos metros cuadrados de baldosas necesitarás para embaldosar un suelo	30,0%	44,3%	18,2%	7,5%	100%
Entender tablas científicas que aparezcan en un artículo de periódico	10,7%	29,9%	35,4%	24,0%	100%
Resolver una ecuación como la siguiente: $6x^2 + 5 = 29$	74,5%	18,1%	4,8%	2,6%	100%
Calcular la distancia real entre dos lugares en un mapa con una escala 1:10.000	18,4%	39,1%	32,4%	10,1%	100%
Resolver una ecuación como la siguiente: $2(x + 3) = (x+3)(x-3)$	73,2%	19,2%	5,0%	2,6%	100%
Calcular el consumo de energía por semana de un aparato electrónico	13,4%	35,7%	35,4%	15,5%	100%
Resolver una ecuación como la siguiente: $3x + 5 = 17$	73,0%	18,9%	5,7%	2,5%	100%

Tabla 3.23. Medias del rendimiento en Resolución de Problemas en relación a la frecuencia de realización de los distintos tipos de ejercicios

		Con frecuencia	Algunas veces	Rara vez	Nunca
Calcular a partir de un horario de trenes cuánto tiempo se necesita para ir de una ciudad a otra	Media	455,2	474,3	493,4	469,3
	Error típico	6,6	4,4	4,9	8,9
Calcular cuánto aumenta el precio de un ordenador al sumarle los impuestos	Media	465,8	468,7	482,5	458,9
	Error típico	5,5	4,3	6,0	9,5
Calcular cuántos metros cuadrados de baldosas necesitarás para embaldosar un suelo	Media	477,5	482,5	468,2	442,4
	Error típico	4,3	4,9	6,7	8,9
Entender tablas científicas que aparezcan en un artículo de periódico	Media	453,9	469,7	483,1	480,7
	Error típico	8,0	5,2	4,5	6,4
Resolver una ecuación como la siguiente: $6x^2 + 5 = 29$	Media	490,1	444,8	405,3	389,8
	Error típico	3,9	5,6	11,7	16,2
Calcular la distancia real entre dos lugares en un mapa con una escala 1:10.000	Media	452,1	476,6	490,4	465,4
	Error típico	5,3	4,6	4,9	8,6
Resolver una ecuación como la siguiente: $2(x + 3) = (x+3)(x-3)$	Media	489,1	450,7	407,3	397,4
	Error típico	4,1	6,1	9,9	16,0
Calcular el consumo de energía por semana de un aparato electrónico	Media	451,2	476,3	486,3	467,8
	Error típico	6,8	4,4	4,9	7,3
Resolver una ecuación como la siguiente: $3x + 5 = 17$	Media	486,3	456,4	451,3	393,3
	Error típico	4,0	6,0	11,0	16,1

Para describir toda esta información de manera clara y concisa se han utilizado las variables “Experiencia de Matemática Pura” y “Experiencia en Matemática Aplicada”, que resumen las frecuencias de cada tipo de tareas. Ambas variables se dividieron en cuatro categorías que se corresponden aproximadamente con las del cuestionario, es decir, “nunca”, “raramente”, “a veces”, y “con frecuencia”.

Las medias del rendimiento de acuerdo a estas categorías resumen claramente lo comentado al describir las distintas tareas realizadas en clase (Tablas 3.24 y 3.25).

Tabla 3.24. Media de rendimiento en relación a la experiencia en matemática pura

		Experiencia en matemática pura			
		Con frecuencia	Algunas veces	Rara vez	Nunca
RPRO	Media	490,17	449,06	409,32	395,47
	Error típico	3,98	6,04	9,28	16,97

Tabla 3.25. Media de rendimiento en relación a la experiencia en matemática aplicada

		Experiencia en matemática aplicada			
		Con frecuencia	Algunas veces	Rara vez	Nunca
RPRO	Media	455,95	479,22	486,75	470,57
	Error típico	5,29	3,94	6,89	8,15

Un estudio más detallado de esta situación, en el que se analizan conjuntamente la experiencia en matemática aplicada y en matemática pura en relación con el rendimiento, apunta a un resultado sorprendente, ya que resolver ejercicios de matemática aplicada “con frecuencia” parece asociarse a una disminución en el rendimiento, con independencia de lo que ocurra con los ejercicios de matemática pura (Tabla 3.26).

Tabla 3.26. Relación entre matemática pura y matemática aplicada con el rendimiento

Experiencia en matemática pura	Experiencia en matemática aplicada	Media	Error típico
Nunca	Nunca	392,02	18,71
	Raramente	416,92	26,64
	A veces	395,72	39,30
	Con frecuencia	362,13	85,37
Raramente	Nunca	319,11	23,89
	Raramente	324,91	13,79
	A veces	303,74	14,61
	Con frecuencia	366,25	16,27
A veces	Nunca	476,74	12,65
	Raramente	461,93	10,13
	A veces	448,54	6,32
	Con frecuencia	404,88	14,47
Con frecuencia	Nunca	504,41	9,66
	Raramente	503,97	7,56
	A veces	493,45	3,96
	Con frecuencia	467,56	5,69

Para profundizar un poco más en este análisis se ha estudiado el nivel económico-socio-cultural de las familias de los estudiantes, de acuerdo a la frecuencia de las tareas de matemáticas pura y aplicada.

Los resultados en la Tabla 3.27 indican alguna diferencia escasa del ESCS con respecto a la experiencia en matemática aplicada, observada principalmente en la categoría “nunca”, que tiene un peso de un 10% en la muestra.

Tabla 3.27. Medias de ESCS según la experiencia en matemática aplicada

		Experiencia en matemática aplicada			
		Con frecuencia	Algunas veces	Rara vez	Nunca
ECSC	Media	-,1475	-,1613	-,1882	-,2356
	Error típico	,051	,035	,056	,074

En lo que respecta a la experiencia en matemática pura, a partir de los resultados en la Tabla 3.28, se refleja que las diferencias entre las familias son más acusadas y se observa un incremento sensible en el estatus económico-socio-cultural al pasar de “raramente” a “con frecuencia”. Esta tendencia no se cumple en la categoría “nunca”, si bien resulta escasamente representativa tanto por su peso en la muestra, alrededor del 2,5%, como por

el hecho de que resulta poco consistente el hecho de que un estudiante de quince años no haya visto nunca ecuaciones de primer o segundo grado.

Tabla 3.28. Medias de ESCS según la experiencia en matemática pura

		Experiencia en matemática pura			
		Con frecuencia	Algunas veces	Rara vez	Nunca
ESCS	Media	-,1009	-,2975	-,5452	-,3898
	Error típico	,036	,048	,083	,097

Para determinar si esas diferencias observadas en el nivel social de las familias pueden explicar las diferencias observadas en el rendimiento se planteó un modelo de regresión, en el que se utilizaron las variables Experiencia en Matemática Pura, Experiencia en Matemática Aplicada y Nivel Económico-Socio-Cultural.

El modelo obtenido, que explica un 14,2% de la variabilidad del rendimiento ($R^2=0,142$), es el siguiente:

$$RPO = 472,67 + 25,35 \text{ ESCS} + 33,96 \text{ Matemática Pura} - 15,42 \text{ Matemática Aplicada}$$

Los errores típicos de los coeficientes son los siguientes:

$$ET(\text{Constante})=4,05; ET(\text{ESCS})= 2,96;$$

$$ET(\text{Matemática Pura})= 2,74; ET(\text{Matemática Aplicada})= 2,77.$$

La conclusión que se deriva de este modelo es que el ESCS y la frecuencia de resolución de ejercicios de matemática pura están asociados positivamente con el rendimiento, mientras que para matemática aplicada lo más eficiente parece ser realizar estas tareas sólo “a veces” o “raramente”. El efecto de “nunca” es casi irrelevante y se puede recoger utilizando un modelo cuadrático en “Experiencia en Matemática Aplicada”, pero el coeficiente de regresión de esa variable no es significativamente distinto de cero.

Tipos de problemas

En el cuestionario de contexto de PISA 2012 se pregunta sobre la frecuencia de resolución de cuatro tipos distintos de problemas que se plantean en clase:

- Algebraicos.
- Procedimentales.
- De razonamiento matemático puro.
- De razonamiento matemático aplicado.

Además, al inicio de las preguntas se ponen dos ejemplos concretos de cada tipo y se pregunta a los alumnos con qué frecuencia los hacen tanto en las clases como en los exámenes del colegio. Ver Tablas 3.29, 3.30, 3.31 y 3.32.

Tabla 3.29. Pregunta respecto a problemas algebraicos

A continuación hay una serie de problemas. Se requiere que los entiendas e imagines los cálculos que hacen falta para resolverlos. Normalmente, los problemas tratan de situaciones prácticas pero los números, las personas y los lugares referenciados están inventados. Toda la información que necesitas para resolverlos se da en el enunciado. Se muestran dos ejemplos.

- 1 Ann es dos años mayor que Betty y Betty cuadruplica la edad de Sam. Cuando Betty tenga 30 años, ¿cuántos tendrá Sam?
- 2 El señor Smith compra una televisión y una cama. La televisión cuesta 625 dólares pero le hicieron un descuento del 10%. La cama costó 200 dólares. ¿Cuánto dinero gastó el señor Smith?

Tabla 3.30. Pregunta respecto a problemas procedimentales

Dos ejemplos de otro tipo de problema matemático.

1. Resuelve $2x+3=7$
2. Hallar el volumen de una caja con lados de 3m, 4m, y 5m

Tabla 3.31. Pregunta respecto problemas matemáticos puros (sin aplicación práctica)

En este tipo de problemas, has de usar tu conocimiento matemático y obtener la solución. No se ofrece una aplicación práctica. Por ejemplo:

1. Calcular la altura de la pirámide en la siguiente situación:
2. Si n es un número primo, ¿puede $(n+1)^2$ ser un número primo?

Tabla 3.32. Pregunta respecto problemas aplicados

En este tipo de problemas tienes que aplicar conocimientos matemáticos que te permitan encontrar una respuesta útil a un problema que surge en la vida cotidiana o en el trabajo. Por ejemplo:

Un periodista de TV dice: "Este gráfico muestra que hay un enorme aumento del número de robos entre 1998 y 1999". ¿Consideras la afirmación del periodista una interpretación aceptable del gráfico? Justifica tu respuesta. (ver gráfico en cuestionario)

1. Durante años, la relación entre el ritmo cardiaco máximo recomendado para una persona y su edad, se expresó mediante la siguiente fórmula:
Ritmo cardiaco máximo recomendado=220-edad
2. Recientes investigaciones han mostrado que había que modificar esta fórmula ligeramente. La nueva fórmula es como sigue:
Ritmo cardiaco máximo recomendado=220- (0.7 x edad)
¿A partir de qué edad aumenta el ritmo cardiaco máximo recomendado como consecuencia de la introducción de la nueva fórmula? Justifica tu respuesta.

Los problemas que más se suelen hacer en las clases son los procedimentales, ya que un 72,5% del alumnado los hace "con frecuencia", seguidos por los algebraicos, con un 58,1%, mientras que esos porcentajes se reducen notablemente en los problemas de razonamiento matemático, ya sea puro o aplicado, con valores del 35,4% y 23,3% respectivamente (Tabla 3.33).

Tabla 3.33. Porcentajes de la frecuencia de realización de los distintos tipos de problemas

	Tipos de Problemas			
	Algebraico	Procedimiento	Razonamiento matemático puro	Razonamiento matemático aplicado
Con frecuencia	58,0%	72,4%	35,4%	23,4%
A veces	36,6%	23,1%	44,3%	48,3%
Rara vez	4,0%	3,5%	16,3%	23,4%
Nunca	1,4%	1,0%	4,0%	4,9%
Total	100%	100%	100%	100%

Al estudiar la relación entre la frecuencia de resolución de cada tipo de problemas y el rendimiento (ver Tabla 3.34), se observa que en el caso de los problemas algebraicos y procedimentales el alumnado disminuye su rendimiento al reducir la frecuencia con la que realizan este tipo de problemas, ya que pasan de una media en torno a los 480 puntos para la categoría “con frecuencia” a unos 400 puntos para la categoría “nunca”.

En los problemas algebraicos el descenso de las puntuaciones se produce de manera gradual, de unos 20 puntos en las tres primeras categorías y de 50 puntos en la siguiente.

En los problemas procedimentales el rendimiento medio asociado a las categorías “a veces” y “rara vez” es casi idéntico y está 30 puntos por debajo del valor medio de la categoría “con frecuencia”.

Las diferencias de rendimiento según las categorías del razonamiento matemático puro son mucho menos acusadas que en los anteriores, y apenas tienen relevancia salvo en la alternativa “nunca”.

Tabla 3.34. Medias del rendimiento según la frecuencia de realización de los distintos tipos de problemas

	Tipos de problemas de matemáticas resueltos en clase							
	Algebraico		Procedimental		Razonamiento matemático puro		Razonamiento matemático aplicado	
	Media	Error típico	Media	Error típico	Media	Error típico	Media	Error típico
Con frecuencia	487,0	3,96	484,7	4,09	481,6	4,87	461,0	5,07
A veces	465,6	5,35	455,9	6,20	475,6	4,85	477,0	4,25
Rara vez	449,5	12,80	454,8	15,75	476,2	6,40	490,3	5,66
Nunca	392,0	16,78	402,9	23,53	440,7	10,99	470,8	11,75

En el caso del razonamiento matemático aplicado, los alumnos que obtienen mayor rendimiento hacen esta clase de problemas “rara vez”, obteniéndose un resultado verdaderamente sorprendente, ya que tienen mayor puntuación media en la categoría “nunca”, que cuando los hacen “con frecuencia”.

Para determinar una visión general de la relación de los cuatro tipos de problemas con la Resolución de Problemas se utiliza un modelo de regresión en el que se incluye el nivel económico-socio-cultural para eliminar las diferencias que pudieran existir entre los estudiantes debido a este factor.

El modelo obtenido explica aproximadamente un 10% del rendimiento y tiene la siguiente estructura:

$$\text{RPRO} = 501,39 + 26,13 \text{ ESCS} + 17,27 \text{ Algebraicos} + 14,13 \text{ Procedimentales} - 12,61 * \text{Raz.Aplicado}$$

Los errores típicos de los coeficientes son los siguientes:

$$\text{ET}(\text{Constante}) = 7,29; \text{ET}(\text{ESCS}) = 3,07; \text{ET}(\text{Algebraicos}) = 3,42$$

$$\text{ET}(\text{Procedimientos}) = 3,95; \text{ET}(\text{Raz.Aplicado}) = 2,37$$

Los problemas de razonamiento matemático puro no intervienen en el modelo porque su coeficiente de regresión vale 1,14 y el error típico de 2,48, con lo cual no resulta ser significativamente distinto de cero. Por tanto, la conclusión general es la misma que con los ejercicios realizados en clase, analizada anteriormente en la sección 2.2.

¿Qué ocurre con la matemática aplicada?

El objetivo de esta sección es buscar alguna explicación al inesperado rendimiento que se asociaba a la frecuencia en realización de ejercicios o problemas de matemática aplicada.

Si se predice el Rendimiento teniendo en cuenta la frecuencia con la que se realizan los distintos ejercicios y problemas de matemáticas se obtiene el siguiente modelo, que explica el 15% ($R^2 = 0,15$) de la variabilidad:

$$\text{RPRO} = 490,2 + 24,3 \text{ ESCS} + 28,4 \text{ Pura} - 16,4 \text{ Aplicada} + 14,7 \text{ Algebraicos} - 8,2 \text{ RazApli}$$

Este modelo carece de una interpretación desde un punto de vista lógico, porque no tiene mucho sentido que el alumnado que resuelven muchos problemas algebraicos o ejercicios de procedimiento, disminuyan su puntuación en Resolución de Problemas porque también hagan muchos problemas o tareas de matemática aplicada.

Desde un punto de vista lógico, no tiene mucho sentido que los estudiantes que resuelven muchos problemas algebraicos o procedimentales disminuyan su puntuación en Resolución de Problemas porque también hagan muchos problemas de matemática aplicada.

Por esta razón puede resultar muy interesante abordar algunos aspectos que aclaren esta cuestión. En concreto, nos centraremos en los siguientes puntos:

- a) Analizar con detalle los ítems del cuestionario.
- b) Conocer el perfil “académico” del alumnado que dice hacer muchos problemas de matemática aplicada y compararlo con el resto.

Análisis de los ítems del cuestionario

En lo que se refiere al análisis de los ítems del cuestionario de contexto, referidos a las matemáticas, se estudiarán dos situaciones concretas en las que se establece una relación muy clara entre un ítem y un tipo de problemas.

Situación 1

Esta situación se refiere al ítem 2 de ejercicios de matemáticas y al segundo de los problemas algebraicos con enunciado aplicado. Éstos son los siguientes:

Ítem 2: Calcular cuánto aumenta el precio de un ordenador al sumarle los impuestos.

Problema: El señor Herrero ha comprado una televisión y una cama. La televisión costaba 625 €, pero ha conseguido un descuento del 10%. La cama cuesta 200€. Por el transporte a casa a pagado 20 €. ¿Cuánto dinero se ha gastado el Sr. Herrero?

El problema resulta algo más complejo por la longitud del enunciado, pero la mayor dificultad matemática del problema estriba en aplicar un impuesto o conseguir un descuento. Desde este punto de vista ambas tareas se pueden considerar problemas o ejercicios de Matemática Aplicada de dificultad similar.

Sin embargo, al tener en cuenta el rendimiento junto con la respuesta al ítem y al problema, se puede construir un modelo de regresión que explica un 9,7% de la variabilidad global ($R^2=0,097$) y que tiene la siguiente expresión:

$$\text{RPRO} = 464,46 + 27,15 \text{ ESCS} + 21,59 \text{ Algebraicos} - 42,97 \text{ Precios} - 8,15 \text{ Precios}^2,$$

Los errores típicos de los coeficientes son:

$$ET(\text{Constante})= 11,00; ET(\text{ESCS})= 2,97; ET(\text{Algebraicos})=3,44;$$

$$ET(\text{Precios})=9,91 ; ET(\text{Precios}^2)= 2,01;$$

donde Precios representa la frecuencia de realización del ítem 2.

Nota: El término cuadrático de los precios se incluyó en el modelo porque su relación con el Rendimiento se asemeja a una parábola.

Al estudiar el modelo anterior se aprecia con claridad que el incremento del ESCS o la frecuencia de los problemas de álgebra mejoran el rendimiento, mientras que hacer muchas veces ese tipo de ejercicios (ítems) lo reducen.

Desde esta perspectiva da la impresión de que los problemas algebraicos relacionados con un problema real no son identificados por el alumnado como problemas de Matemática Aplicada, aunque en realidad se están trabajando las mismas competencias.

Situación 2

Esta situación hace referencia al ítem 9 de ejercicios de matemáticas y al segundo problema de razonamiento matemático aplicado, siendo estos los siguientes:

Ítem 9: Resolver una ecuación como la siguiente: $3x + 5 = 17$.

Problema: Durante años, la relación entre el ritmo cardíaco máximo recomendado para una persona y su edad, se expresó mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Ritmo cardíaco máximo recomendado} = 220 - \text{edad}$$

Recientes investigaciones han mostrado que había que modificar esta fórmula ligeramente. La nueva fórmula es como sigue:

$$\text{Ritmo cardíaco máximo recomendado} = 220 - (0,7 \times \text{edad})$$

¿A partir de qué edad aumenta el ritmo cardíaco máximo recomendado como consecuencia de la introducción de la nueva fórmula? Justifica tu respuesta.

El ítem es un ejercicio puramente procedimental, ya que se trata de resolver una ecuación de primer grado. Sin embargo, el problema aplicado resulta más complicado ya que es necesario comprender el enunciado, manejar la ecuación de una recta y además la solución final implica resolver la ecuación de primer grado $220 - x = 208 - 0,7x$, que equivale a resolver $0,3x + 208 = 220$.

Por lo tanto, trabajar con este tipo de problemas implicaría entender el enunciado (comprensión lectora), plantear el modelo a resolver (formular la ecuación de primer grado) y aplicar las destrezas procedimentales (resolver la ecuación).

Ya que al alumnado se le pide leer el enunciado de los problemas pero que no lo resuelvan, no es de esperar un análisis detallado de lo que realmente implicaría, aunque resolver un problema de matemática aplicada suele requerir todos los elementos citados anteriormente.

Desde una perspectiva estrictamente matemática resulta muy difícil entender que el hecho de resolver “con frecuencia” este tipo de problemas disminuya el rendimiento, mientras que los problemas procedimentales lo incrementan, tal y como se refleja en el siguiente modelo de regresión, que explica el 11,1% de la variabilidad del rendimiento:

$$\text{RPRO} = 497,62 + 26,41 \text{ ESCS} - 9,15 \text{ Raz.Aplicado} + 26,03 \text{ Ecuación}$$

Los errores típicos de los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \text{ET}(\text{Constante}) &= 6,45 & ; & \quad \text{ET}(\text{ESCS}) = 3,08; & \quad \text{ET}(\text{Raz.Aplicado}) &= 2,30 & ; \\ \text{ET}(\text{Ecuación}) &= 2,81 & & & & & \end{aligned}$$

donde, Raz.Aplicado= frecuencia de resolución de problemas de Razonamiento Matemático Aplicado

Ecuación= frecuencia de resolución del ítem 9 (ecuación lineal).

Por otra parte, los dos enunciados que se plantean en los problemas aplicados son de naturaleza muy diferente; en el primero la dificultad está en el enunciado porque desde el punto de vista de procedimiento solo involucra una resta y un cociente, mientras que en el segundo a la dificultad del enunciado se le añade la necesidad de conocer procedimientos matemáticos mucho más complejos.

Para determinar el perfil “académico” de los estudiantes que dicen hacer más ejercicios de matemática aplicada o de problemas de razonamiento matemático aplicado se calcularon los resultados de otras pruebas PISA como la Lectura y Ciencias, además de las de Matemáticas y de Matemáticas con ordenador. Los resultados correspondientes se detallan en las secciones siguientes.

Perfil académico del alumnado

En lo referido al rendimiento en las diferentes pruebas PISA con respecto a la experiencia con los ejercicios de matemáticas, los resultados son completamente consistentes con lo ya conocido, puesto que replican la estructura del rendimiento que se tenía en la Resolución de Problemas (ver Tabla 3.35). Las puntuaciones mayores se obtienen entre el alumnado que manifiesta hacer las tareas de Matemática Aplicada “a veces” o “rara vez”, con independencia del tipo de materia.

Tabla 3.35. Medias del rendimiento según la realización de ejercicios de matemática aplicada

Experiencia en Matemática Aplicada		PV Matemáticas	PV Lectura	PV Ciencias	PV RPRO	PV CMatemáticas
Nunca	Media	475,92	480,65	481,79	470,56	461,06
	Error típico	5,71	6,40	5,29	8,55	5,42
Raramente	Media	493,63	499,73	504,73	486,75	478,02
	Error típico	4,30	4,53	4,10	4,89	4,61
A veces	Media	488,05	491,24	503,71	479,22	479,41
	Error típico	2,89	3,23	2,64	3,95	3,66
Con frecuencia	Media	472,82	472,35	490,79	455,95	472,96
	Error típico	4,87	4,53	4,35	5,29	4,52
Total	Media	482,95	485,57	494,87	476,77	475,08
	Error típico	2,43	2,65	2,37	4,10	3,17

Cuando se realiza el análisis anterior teniendo en cuenta la experiencia en matemática pura, los resultados tienen una estructura idéntica a los ya obtenidos, puesto que los valores medios en todas las pruebas PISA crecen al aumentar la frecuencia con que se realizan este tipo de tareas (ver Tabla 3.36).

Tabla 3.36. Medias del rendimiento según la realización de ejercicios de matemática pura

Experiencia en Matemática Aplicada		PV Matemáticas	PV Lectura	PV Ciencias	PV RPRO	PV CMatemáticas
Nunca	Media	424,00	437,81	395,47	432,58	
	Error típico	13,15	12,82	12,54	16,97	10,88
Raramente	Media	438,56	423,34	448,28	409,32	440,34
	Error típico	6,81	6,76	6,44	9,28	6,90
A veces	Media	463,01	459,49	476,73	449,06	456,51
	Error típico	4,34	5,01	4,34	6,04	4,75
Con frecuencia	Media	495,89	503,15	511,12	490,17	485,40
	Error típico	2,84	3,06	2,58	3,98	3,33
Total	Media	482,95	485,57	494,87	476,77	475,08
	Error típico	2,43	2,65	2,37	4,10	3,17

La distribución de las medias de los resultados de las pruebas PISA teniendo en cuenta la clasificación de los problemas de matemáticas como algebraicos, procedimentales, de razonamiento matemático puro y de razonamiento matemático aplicado vuelve a replicar lo que se había visto en el caso de la Resolución de Problemas. En los tres primeros tipos de problemas el incremento en la frecuencia de resolución está asociado con un incremento del rendimiento, mientras que para el último tipo de problemas la relación cambia por completo (Tablas 3.37, 3.38, 3.39 y 3.40).

Tabla 3.37. Rendimiento según la realización de problemas con enunciado algebraico

Experiencia en Matemática Aplicada		PV	PV	PV	PV	PV
		Matemáticas	Lectura	Ciencias	RPRO	CMatemáticas
Nunca	Media	428,28	418,39	438,23	392,01	417,52
	Error típico	13,46	14,47	13,30	16,78	15,42
Raramente	Media	475,84	477,89	484,50	449,51	465,01
	Error típico	8,71	10,75	7,94	12,80	8,34
A veces	Media	475,35	473,07	488,36	465,56	467,67
	Error típico	3,52	3,91	3,85	5,35	3,72
Con frecuencia	Media	493,60	501,34	508,79	486,99	484,69
	Error típico	3,00	3,24	2,62	3,96	3,29
Total	Media	482,95	485,57	494,87	476,77	475,08
	Error típico	2,43	2,65	2,37	4,10	3,17

Tabla 3.38. Rendimiento según la realización de problemas procedimentales

Experiencia en Matemática Aplicada		PV	PV	PV	PV	PV
		Matemáticas	Lectura	Ciencias	RPRO	CMatemáticas
Nunca	Media	429,98	412,43	431,56	402,95	413,15
	Error típico	17,42	17,77	16,32	23,53	18,37
Raramente	Media	467,28	454,53	481,87	454,81	465,19
	Error típico	10,34	10,16	9,37	15,75	11,30
A veces	Media	469,08	465,50	484,50	455,92	461,07
	Error típico	4,41	4,82	5,24	6,20	4,25
Con frecuencia	Media	491,90	498,85	505,78	484,69	483,00
	Error típico	2,75	2,93	2,52	4,09	3,46
Total	Media	482,95	485,57	494,87	476,77	475,08
	Error típico	2,43	2,65	2,37	4,10	3,17

Tabla 3.39. Rendimiento según la realización de problemas de matemática puro

Experiencia en Matemática Aplicada		PV Matemáticas	PV Lectura	PV Ciencias	PV RPRO	PV CMatemáticas
Nunca	Media	452,99	455,45	469,08	440,70	444,99
	Error típico	7,04	7,10	6,98	10,99	7,49
Raramente	Media	479,13	483,12	495,42	476,20	472,14
	Error típico	4,50	5,00	4,95	6,40	4,23
A veces	Media	485,43	486,90	498,38	475,64	475,81
	Error típico	3,12	3,57	3,12	4,85	3,68
Con frecuencia	Media	492,28	498,63	506,56	481,59	483,65
	Error típico	3,99	3,85	3,39	4,87	4,36
Total	Media	482,95	485,57	494,87	476,77	475,08
	Error típico	2,43	2,65	2,37	4,10	3,17

Tabla 3.40. Rendimiento según la realización de problemas de matemática aplicada

Experiencia en Matemática Aplicada		PV Matemáticas	PV Lectura	PV Ciencias	PV RPRO	PV CMatemáticas
Nunca	Media	475,82	488,95	491,87	470,82	471,04
	Error típico	8,35	8,99	7,68	11,75	7,65
Raramente	Media	499,91	503,02	512,38	490,29	484,99
	Error típico	3,78	4,44	3,89	5,66	3,88
A veces	Media	484,72	487,44	498,31	477,01	476,37
	Error típico	3,25	3,36	3,02	4,25	3,63
Con frecuencia	Media	473,37	477,35	489,71	461,03	469,27
	Error típico	3,32	3,70	3,06	5,07	4,49
Total	Media	482,95	485,57	494,87	476,77	475,08
	Error típico	2,43	2,65	2,37	4,10	3,17

Estos últimos análisis indican que la causa de esa relación negativa entre resolver problemas de matemática aplicada y el rendimiento en la Resolución de Problemas no se debe a esos ejercicios en sí mismos. En realidad, el motivo central de ese extraño comportamiento radica en que el alumnado que resuelve con mayor frecuencia estos ejercicios son los que tienen menor rendimiento en todas las pruebas.

Por otra parte, además del rendimiento en Resolución de Problemas, existen otros aspectos que deben ser tenidos en cuenta en el desarrollo del alumnado. En concreto, en el cuestionario de contexto se recogen algunos aspectos metacognitivos tan importantes como la perseverancia, ya analizada con detalle en la sección 1.1, la facilidad para la resolución de problemas, descrita en la sección 1.2, o el interés, la auto-eficacia y el auto-concepto en matemáticas.

En las Tablas 3.41 y 3.42 se recogen los resultados de dicho análisis. Como se puede observar, la frecuencia de realización de ambos tipos de tareas tiene una relación positiva con todas las variables cognitivas señaladas. Respecto a las tareas matemáticas

puras, los resultados complementan los ya obtenidos en cuanto a la mejora del rendimiento en matemáticas y en resolución de problemas según la realización de tipos de problemas algebraicos, procedimentales y matemáticos puros analizada anteriormente (Tablas 3.29, 3.30 y 3.31).

Tabla 3.41. Variables cognitivas según la frecuencia de tareas matemáticas puras

		Interés	Auto-eficacia	Auto-concepto	PerseveranciaF1	Facilidad
Nunca	Media	-,8376	-,7767	-,2508	-,380	-,627
	Error Típico	,152	,312	,152	,258	,188
Raramente	Media	-,2203	-,2514	-,1465	-,247	-,182
	Error Típico	,069	,084	,098	,080	,789
A veces	Media	-,2437	-,1580	-,2050	-,074	-,133
	Error Típico	,059	,052	,062	,045	,044
Con frecuencia	Media	-,0317	,1941	-,0456	,187	,076
	Error Típico	,035	,024	,034	,028	,029

Tabla 3.42. Variables cognitivas según la frecuencia de tareas matemáticas aplicadas

		Interés	Auto-eficacia	Auto-concepto	Perseverancia F1	Facilidad
Nunca	Media	-,3723	-,2451	-,1722	-,167	-,238
	Error Típico	,077	,091	,067	,091	,106
Raramente	Media	-,1961	-,0377	-,0457	,015	-,084
	Error Típico	,047	,048	,055	,046	,046
A veces	Media	-,1080	,0555	-,0642	,089	-,021
	Error Típico	,042	,032	,038	,039	,027
Con frecuencia	Media	,0403	,2620	-,1226	,224	,166
	Error Típico	,052	,048	,064	,047	,047

Por su parte, las tareas de matemáticas aplicadas juegan un papel importante en la enseñanza, ya que están relacionadas positivamente con casi todos los aspectos metacognitivos citados. Por ejemplo, en la Tabla 3.42 se aprecia que al aumentar la frecuencia de realización de este tipo de tareas se consigue un aumento de los valores medios, tanto del interés y la auto-eficacia en matemáticas, como de la perseverancia y la facilidad.

CONCLUSIONES

En los procesos de aprendizaje interviene una multitud de factores, la mayoría de ellos interrelacionados, que se asocian con el rendimiento pero que en ningún caso lo determinan.

El aprendizaje “académico” es un proceso que se inicia en los primeros años de la vida de las personas y que tiene un carácter acumulativo. Por eso resulta tan importante que la persona adquiera buenos hábitos de estudio en aspectos tales como perseverancia,

estrategias de aprendizaje, autoconfianza, etc., a la vez que se evita que tenga carencias de conocimiento.

Hay un porcentaje relativamente alto del alumnado, en torno al 30%, que dice haber visto “al menos varias veces” algunos conceptos matemáticos que figuran en el cuestionario de contexto como preguntas de control pero que no existen realmente. También se observó que alrededor del 20% del alumnado respondía de manera “poco o nada” consistente a algunas preguntas referidas a la perseverancia y formuladas de manera que la misma categoría de respuesta tiene un significado contrario.

La perseverancia está claramente relacionada con el rendimiento, y, en general, las personas que tienen esta cualidad más desarrollada obtienen mejores resultados, incluso cuando parten de unas condiciones desfavorables. En este estudio se ha detectado que cuando se mide la perseverancia con las preguntas del cuestionario, se debe tener en cuenta la consistencia de las respuestas, pues la mayor coherencia del alumnado en sus respuestas está asociada con un rendimiento más alto.

La auto-percepción en la facilidad de resolución de problemas también se relaciona positivamente con el rendimiento. Por otra parte, las personas que percibían tener más facilidad también tendían a ser más perseverantes. Este resultado muestra una vez más la imbricación que existe entre los factores relacionados con el rendimiento y el hecho de que mejorar el comportamiento de uno de ellos puede producir un incremento del rendimiento que va más allá de esa mejora puntual.

El alumnado tiende a combinar diferentes estrategias para la resolución de problemas de la vida cotidiana, a la vez que les otorga diferentes prioridades según la situación empleada. Además, se detectó que las personas que tienden a afrontar los problemas de la vida cotidiana basándose en una respuesta reflexiva-metódica, combinada con alguna otra estrategia, tienden a obtener los mejores resultados en Rendimiento.

Los ejercicios de matemáticas más comunes en las clases son los de procedimiento (resolución de ecuaciones), ya que más del 70% del alumnado los hacen “con frecuencia”. Los ejercicios de matemática aplicada son bastante menos habituales, ya que sólo se resuelven “con frecuencia” en torno a un 20%.

La relación del rendimiento con los dos tipos de ejercicios de matemáticas (puros y aplicados) es completamente diferente. En el caso de los de matemática pura, el rendimiento crece con la frecuencia de resolución de ese tipo de ejercicios. Para matemática aplicada, el mayor rendimiento se alcanza cuando estas tareas se trabajan “rara vez” o “a veces”. Cuando se estudia el rendimiento teniendo en cuenta la clasificación de los problemas como: algebraicos con enunciado aplicado, de procedimiento, de razonamiento matemático puro y de razonamiento matemático aplicado, se corroboran los resultados obtenidos en el caso de los ejercicios.

El rendimiento tiene una relación positiva con la frecuencia de resolución de problemas algebraicos o de procedimiento. En el caso de los problemas de razonamiento puro, se mantiene la misma tendencia, pero con diferencias son mucho menos acusadas.

Al analizar los problemas de razonamiento matemático aplicado se obtiene un resultado muy llamativo, ya que el rendimiento tiende a disminuir cuando se resuelven tales problemas “con frecuencia”, con independencia de la frecuencia con que se hagan los otros tipos de problemas. Además, el mayor rendimiento se obtiene cuando los problemas de razonamiento matemático aplicado se realizan “rara vez”.

Cuando se analiza con detalle esta paradójica situación se aprecia que este tipo de problemas (por ejemplo, el cálculo del importe de una compra teniendo en cuenta los

impuestos o descuentos) daba lugar a resultados contradictorios dependiendo de si en el cuestionario se consideraban como ejercicios matemáticos aplicados o se incluían como problemas algebraicos con enunciado. Otro tanto ocurría con la resolución de una ecuación de primer grado, según se consideraba en el cuestionario como ejercicio de matemática pura o aparecía en el cuestionario como problema de razonamiento matemático aplicado.

La explicación que nos parece más verosímil a estas aparentes contradicciones no está tanto en la dicotomía matemática pura – matemática aplicada, como en las características del alumnado que tiende a realizar con mayor frecuencia las tareas consideradas de matemática aplicada. Después de analizar las puntuaciones de estos alumnos en otras pruebas PISA, como ciencias o lectura, se comprobó que la estructura de los rendimientos es la misma en todas ellas, es decir, tales alumnos tienen puntuaciones menores no sólo en resolución de problemas o matemáticas, sino también en lectura y ciencias.

Cabe destacar que los ejercicios denominados de matemática aplicada en el cuestionario involucran procesos de resolución y conceptos matemáticos más sencillos (aritmética y geometría básicas) que los ejercicios denominados de matemática pura (ecuaciones de segundo grado). Podría pensarse que los problemas “aplicados” son vistos con más frecuencia por alumnos que podrían tener más dificultades con los conceptos matemáticos avanzados. No puede llegarse a una conclusión nítida ya que la categoría “con frecuencia” puede estar incluyendo frecuencias reales bien distintas.

Por otra parte, las matemáticas aplicadas, que son más frecuentes entre los estudiantes con peor rendimiento, tienen algunas características muy importantes y que deben ser tenidas en cuenta; por ejemplo, parecen relacionarse con una mejora en la autoeficacia o el interés por las matemáticas, así como con la facilidad y la perseverancia para resolver problemas.

REFERENCIAS

- AUSUBEL, D.P. (1968). "Educational Psychology: A Cognitive View." Holt, Rinehart & Winston.
- BADGER, M.S., SANGWIN, C.J., HAWKES, T.O. (2012). "Teaching Problem-Solving in Undergraduate Mathematics", University of Birmingham.
- BIGGS, J.B. (1994). "Student learning research and theory: where do we currently stand?". En G. Gibbs (Ed.), *Improving student learning: Theory and practice*, pp.1-19. Oxford: The Oxford Centre for Staff Development.
- CORDERO, J.M., PEDRAJA, F., SIMANCAS, R. (2014) "Superando las barreras: factores determinantes del rendimiento en escuelas y estudiantes con un entorno desfavorable", *Informe PISA 2012 CBA*.
- CORRAL BLANCO, N., ZURBANO FERNÁNDEZ, E., BLANCO FERNÁNDEZ, A., GARCÍA HONRADO, I., RAMOS GUAJARDO, A. (2012). "Estructura del entorno educativo familiar: su influencia sobre el rendimiento y el rendimiento diferencial", *Informe PIRLS-TIMSS 2011, Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias, Volumen 2: Informe español. Análisis secundario*, pp. 10-42.
- FUNKE, J. (2001). "Dynamic systems as tools for analysing human judgment", *Thinking & Reasoning* 7 (1), pp. 69–89.
- GREENE, B.A., MILLER, R.B., CROWSON, H.M., AKEY, K.L. (2004). "Predicting high school students' engagement and achievement: Contributions of classroom perceptions and motivation", *Contemporary Educational Psychology* 29, pp. 462-482.
- GREIFF, S., HOLT, D.V., FUNKE, J. (2013). "Perspectives on Problem Solving in Educational Assessment: Analytical, Interactive, and Collaborative Problem Solving", *Journal of Problem Solving* 5 (2), pp. 71-91.
- HECKMAN, J.J., STIXRUD J., URZUA, S. (2006). "The effects of cognitive and non-cognitive abilities on labor market outcomes and social behaviour", *Journal of Labor Economics*, 24 (3), pp. 411-482.
- HECKMAN, J.J., MOON, S.H., PINTO, R., SAVELYEV, P.A., YAVITZ, A. (2010). "The rate of return to the HighScope Perry Preschool Program", *Journal of Public Economics* 94, pp. 114-28.
- HECKMAN, J.J. (2011) "Integrating Personality Psychology into Economics", *NBER Working Paper* No. 17378.
- MORALES VALLEJO, P. (2011). "Cuestionarios y escalas", *Universidad Pontificia Comillas, Madrid*. Disponible en <http://www.upcomillas.es/personal/peter/otrosdocumentos/CuestionariosyEscalas.doc>
- NCTM (2000) "Principles and Standards for School Mathematics" *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, Reston.
- OECD (2013a) "PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy", París.
- OECD (2013b) "PISA 2012 Results: What Makes a School Successful? Resources, Policies and Practices. Vol. IV", París.
- OECD (2014) "Do students have the drive to succeed?" *PISA In Focus*, 37.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, California: Academic Press.

SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. Ed. Grouws, 334-370. New York, Macmillan.