



IMÁGENES SOBRE LAS MATEMÁTICAS, SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE SECUNDARIA Y TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

VICTORIA SÁNCHEZ GARCÍA Y SALVADOR LLINARES (*)

RESUMEN. Este estudio tiene por objetivo indagar sobre los orígenes y el contenido de las imágenes de estudiantes para profesores de Secundaria sobre las Matemáticas y la enseñanza/aprendizaje de las mismas, y su influencia en la forma en la que estos estudiantes interpretan las tareas matemáticas escolares. Los participantes fueron cinco licenciados universitarios matriculados en un Curso de Adaptación Pedagógica (área de Matemáticas). A través del análisis de una serie de entrevistas clínicas semiestructuradas, diseñadas de modo que permitiesen realizar una descripción de las imágenes de cada estudiante para profesor sobre las Matemáticas y su enseñanza/aprendizaje, fueron emergiendo una serie de imágenes que se describen como estudios de casos. La comparación de los datos de cada caso nos ha permitido apreciar los diferentes papeles desempeñados por las imágenes de la enseñanza y el aprendizaje, aportando ideas sobre los referentes cognitivos con los que los estudiantes para profesor de Matemáticas de Secundaria pueden interpretar la información proporcionada en los programas de formación.

ABSTRACT. The objective of this study is to research on the origins and contents of students to be secondary school teachers' images on maths, maths' teaching/learning, and its influence in the way these students interpret school mathematical tasks. The participants were five university graduates who were registered for a Pedagogical Adaptation Course (maths' area). A series of images that we describe as studies of cases arose from our analysis of semistructural clinical interviews, designed in a way to allow us doing a description of each student's images on maths and maths' teaching/learning. The comparison between each case's data has allowed us to observe the different functions of teaching and learning images, and has added ideas on student's cognitive referents to interpret the information given in training syllabuses.

LAS IMÁGENES COMO UNA FORMA DE INDAGAR SOBRE EL CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA PROFESORES

Las concepciones e imágenes previas de los estudiantes para profesores y la influencia que pueden ejercer sobre sus procesos

de aprender a enseñar son temas de gran importancia en la formación de profesores de Matemáticas (Ball, 1988, 1991; Ball & McDiarmind, 1990; Llinares & Sánchez, 1996; Sánchez & Llinares, 1996). Esta importancia ha sido destacada por numerosos autores (Wilson, Shulman & Richert, 1987; Calderhead & Robson, 1991), que han proporcionado información sobre las

(*) Universidad de Sevilla.

concepciones e imágenes que los estudiantes para profesores llevan a los programas de formación y las dificultades que puede plantear cuando se enfrentan a la complejidad de la enseñanza (Calderhead, 1991).

En las investigaciones sobre las creencias y concepciones de los profesores, la noción de «imagen» se ha empleado tanto para la caracterización de los constructos teóricos como en las investigaciones empíricas. Para Calderhead y Robson (1991), este término ha sido utilizado en formas muy diferentes para describir el conocimiento de los profesores: para referirse a metáforas generales sobre el pensamiento acerca de la enseñanza (Clandinin, 1986), para describir el concepto global que los profesores tienen de una lección (Morine-Dershimer, 1979) o como instantáneas de incidentes o alumnos concretos (Eraut, 1985).

Calderhead y Robson (1991) señalan que:

Las imágenes... representan un conocimiento sobre la enseñanza pero pueden actuar también como modelos para la acción, y además contienen frecuentemente una componente afectiva, estando asociadas con sentimientos y actitudes particulares (Calderhead & Robson, 1991, p. 3).

Aunque estos autores utilizan el término «conocimiento» en la caracterización de las imágenes, incluyen también componentes afectivas y actitudes. Por lo tanto, podemos pensar que «imagen» esta siendo empleado como un término englobante en el sentido de «cognición». Para otros investigadores, las imágenes establecen, de alguna forma, conexiones entre pasado, presente y futuro, como se pone de manifiesto en la siguiente definición:

Imagen se conceptualiza aquí como una clase de conocimiento encarnado en una persona y conectado con el pasado, presente y futuro individual. La imagen dibuja el presente y el futuro en un nexo de experiencias personalmente significativo enfocado en la situación inmediata que le reclama. Penetra en el pasado recogiendo hilos experienciales conectados significativamente con el presente. Y penetra intencionalmente en el futuro, y crea nuevos hilos significativamente conectados a las situaciones que se experimentaron, y a las nue-

vas situaciones anticipadas desde la perspectiva de la imagen (Clandinin & Connelly, 1985 b, p. 198).

Por otra parte, Elbaz (1983) utiliza el término «imágenes» para referirse a breves comentarios metafóricos o descriptivos de algunos aspectos de la situación que intentan recoger las «opiniones básicas» de los profesores (la filosofía de su enseñanza); son las construcciones globales del profesor que orientan su conducta, expresan sus propósitos y median entre el pensamiento y la acción. Para Elbaz las imágenes median entre el pensamiento y la acción a un nivel más general que las reglas y los principios y muestran cómo distintas clases de conocimiento y valores se articulan en las situaciones de enseñanza.

En otros casos, las imágenes son modos de representar cómo los profesores individuales se ven a sí mismos en sus contextos de enseñanza, tratando de entender la resistencia de los profesores a aceptar nuevas direcciones curriculares (Roulet, 1996), los procesos de cambio (Hannay, 1996). Otros estudios han considerado las imágenes de la enseñanza/aprendizaje en estudiantes para profesores (Calderhead y Robson, 1991), indicando que este constructo puede ser útil para representar el conocimiento que puede ser trasladado en acción en la clase, o para identificar la forma en la que los estudiantes para profesores piensan sobre sí mismos como profesores y cómo se relaciona esto con sus prácticas de enseñanza (Johnston, 1992).

EL TÉRMINO «IMAGEN» EN LAS INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En relación con las Matemáticas, el término imagen también ha sido considerado como parte integrante de las concepciones de los profesores. En ese sentido, para Thompson (1992):

Una concepción de los profesores de la naturaleza de las Matemáticas puede ser vista como las creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias conscientes o subconscientes de los profesores acerca de la disciplina de las Matemáticas (Thompson, 1992, p. 132).

Entre diferentes investigaciones que han utilizado dicho término, Roulet (1996) identificó imágenes con concepciones al considerar las imágenes sobre las Matemáticas como «ideas sobre las Matemáticas». Mura (1995) asoció «imágenes de las Matemáticas» con «visiones de las Matemáticas» reunidas a través de una encuesta nacional, para posteriormente referirse en el mismo artículo a «concepciones» como un término sinónimo. Por otra parte, otros autores (Branco & Oliveira, 1996) han estudiado la influencia de las imágenes de los profesores sobre el aprendizaje de las Matemáticas en su desarrollo profesional. La noción de imagen también ha sido utilizada en los intentos de describir y comprender referentes cognitivos en el proceso de aprender a enseñar Matemáticas. Así, Gates (1996) la utiliza en el sentido de Calderhead antes descrito para analizar los procesos de aprendizaje de estudiantes para profesores de Matemáticas de Secundaria.

En este estudio, utilizamos el término imagen según la caracterización de Elbaz (1983) reelaborada por Johnston (1992) considerándolas como parte de las concepciones (siguiendo a Thompson, 1992) que sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje llevan a los programas de formación los estudiantes para profesor. Nos planteamos las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿En qué medida las experiencias previas y la formación previa específica de los estudiantes para profesores de Secundaria condicionan la existencia de unas determinadas imágenes?
- ¿Cuál es el contenido de las imágenes de estudiantes para profesores de Secundaria sobre las Matemáticas y la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas?
- ¿Cómo determinan estas imágenes la forma en que interpretan las tareas matemáticas escolares?

Nuestra investigación se apoya en la hipótesis de que el contenido de las imágenes de los estudiantes para profesor y la

forma en que se relacionan tienen implicaciones en los procesos de aprendizaje que se pueden generar en el programa de formación. En este sentido, se conjetura que el contenido y la organización de las imágenes de los estudiantes para profesor influye en «lo que se aprende» y «cómo se aprende» en esos programas. Por lo tanto, las descripciones detalladas del contenido y relaciones de las imágenes de los estudiantes para profesor y la influencia que ejercen en su forma de considerar las tareas escolares, consideradas como uno de los instrumentos a través de los que el profesor desarrolla su trabajo con los alumnos, deben permitir obtener información para el diseño de programas de formación y para comprender los procesos de aprendizaje en ellos generados.

METODOLOGÍA

PARTICIPANTES

Los participantes fueron cinco licenciados universitarios (4 hombres y 1 mujer), que se prestaron a colaborar voluntariamente en el estudio, de edades comprendidas entre 22 y 25 años (a los que denominaremos CAP1, CAP2, CAP3, CAP4 y CAP5). Cuando se desarrolló la investigación, estaban matriculados en el Curso de Adaptación Pedagógica (Área de Matemáticas), por lo que les consideraremos estudiantes para profesores de Secundaria. No hubo ningún criterio especial de selección de estos estudiantes, a los que exclusivamente caracterizaba su deseo de cooperar en estudios que pudieran incidir en la mejora de su formación. Aunque el proyecto comenzó con cinco estudiantes, sólo cuatro de ellos (CAP1, CAP3, CAP4 y CAP5) completaron todos los instrumentos de recogida de datos. En ese año, el curso en la Universidad de Sevilla contemplaba dos fases (teórica y práctica), que incluían apartados correspondientes a teoría de la educación, psicología de la educación, didáctica general y didáctica de las Matemáticas y prácticas de enseñanza. Estas últimas se

realizaban con un profesor tutor (de Matemáticas en este caso) en un centro de Secundaria.

INSTRUMENTOS

Se elaboraron una serie de entrevistas clínicas semiestructuradas (ver Llinares, 1996, para una descripción detallada de los diferentes instrumentos empleados), diseñadas de modo que permitiesen realizar una descripción de las imágenes de cada estudiante para profesor sobre las Matemáticas y su enseñanza/aprendizaje:

- Una entrevista centrada en los antecedentes biográficos del estudiante para profesor de Secundaria. En ella, se planteaban una serie de preguntas generales encaminadas a indagar sobre el porqué de la elección de estudiar Matemáticas y de ser profesor de esa materia, lo que pensaban que era necesario para poder empezar a enseñar, etc. Se intentaba así construir lo que podríamos denominar «biografía matemática» del participante.
- Una entrevista centrada en la clasificación y el análisis de una serie de tareas sobre funciones, extraídas de libros de texto escolares. En ambos casos, los problemas procedían de un análisis previo de diferentes libros de texto, utilizando como criterio el modo de representación empleado en el problema y la actividad hipotética que éste demandaba al alumno (García & Llinares, 1995).

Esta entrevista constaba de dos partes:

- En la primera, el estudiante para profesor de Secundaria tenía que clasificar 20 problemas proporcionados por los investigadores y justificar los criterios de clasificación utilizados.
- Posteriormente, se le planteaba que

analizasen en profundidad diez de estos mismos problemas desde diferentes perspectivas: descripción de la tarea, actividad demandada al estudiante, objetivo que se pretende, lo que se aprendería haciendo cada una de ellas, cómo las podría resolver un alumno hipotético y cómo el estudiante para profesor pensaba que podría plantear su enseñanza. En la figura I, se incluyen algunos de los problemas empleados.

- Análisis de casos: se presentaban cuatro casos y se pedía realizar un análisis de las situaciones hipotéticas planteadas en ellos. Estas se centraban en dificultades de los alumnos con alguna noción relativa al concepto función. La estructura del caso consistía en la descripción de una respuesta de un alumno a una tarea con funciones y cuestiones que el caso planteaba al profesor. Unas cuestiones eran de diagnóstico, centradas en identificar posibles causas para la respuesta descrita, mientras que otras tenían carácter de intervención, planteándose en ellas de qué forma podía el profesor ayudar al alumno. En la figura II, se presenta un ejemplo de los casos utilizados.

Las entrevistas semiestructuradas se realizaron aproximadamente a las cuatro semanas del comienzo del CAP, antes de realizar sus prácticas de enseñanza. Las grabaciones obtenidas fueron posteriormente transcritas en su totalidad.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

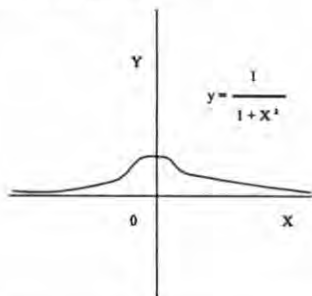
En primer lugar, se realizó un análisis de carácter descriptivo de los procedimientos y argumentos empleados por los estudiantes para profesores, que permitió la reducción de la información obtenida de las diferentes transcripciones, identificando aquellos

FIGURA I
Ejemplos de problemas utilizados en el análisis y clasificación

Problema A

Leyendo una gráfica: dada la grafica de la función $f(x) = 1 / (x^2 + 1)$, responde a tu manera las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuál es el máximo y en caso contrario su extremo superior?
2. ¿Cuál es el mínimo y en caso contrario su extremo inferior?
3. ¿En qué intervalo es creciente y en qué intervalo es decreciente?
4. ¿Está acotada?
5. ¿Es simétrica? Si lo es, ¿respecto de quién?



Problema C

Se quieren construir cajas de cartón sin tapa a partir de piezas cuadradas de 1 m de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando. Expresa el volumen en función del lado x del cuadrilátero cortado en la esquina.

Problema D

Dibuja las graficas de las parábolas siguientes localizando, previamente, el vértice:

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 4x$

d) $y = -x^2 - 5$ e) $y = -x^2 + 4x + 5$ f) $y = 2x^2 + 2$

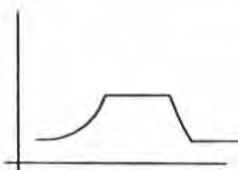
Problema E

Dos motoristas parten, simultáneamente, de A y B. El primero se dirige a B con una velocidad de 100 km/h y el segundo se dirige a A con una velocidad de 150 km/h. Si A y B distan entre sí 300 km, ¿a qué distancia de A se encuentran? ¿Cuánto tardan en encontrarse?

FIGURA II
Ejemplo de casos utilizados

Caso 1

Al introducir las funciones y las gráficas en una clase de 1º de BUP (14-15 años), se han estado utilizando tareas que consisten en dibujar gráficas a partir de conjuntos de pares de números contextualizados en una situación y a partir de ecuaciones. Un día, al empezar la clase, se dibujó la siguiente gráfica en la pizarra



y se pidió a los alumnos que encontraran una situación con la que se pudiera corresponder.

Un alumno dijo:

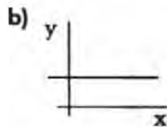
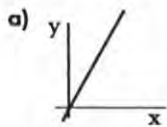
"Puede ser el camino de una excursión en la que tuvimos que subir a una colina, luego caminar un trozo llano para luego bajar por una pendiente y recorrer finalmente un trozo llano antes de terminar."

¿Cómo podrías responder al comentario de este alumno?

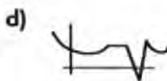
¿Cuál crees que puede ser la causa de este comentario?

Caso 2

A un estudiante de 2º de BUP (15-16 años) se le pidió que dijera cuál de las siguientes expresiones/gráficas eran funciones:



c)
$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$



e) $y = x^2 + 1$

El estudiante dijo entonces que

- a) y e) son funciones, pero c) no lo es porque está «partida», d) tampoco porque no se puede encontrar una ecuación para esa gráfica, y además la gráfica tiene una forma «extraña», y b) tampoco es una función porque la imagen siempre es la misma."

¿Cuál crees que puede ser la causa de estas respuestas?

¿Cómo podrías responder al comentario de este alumno?

párrafos que proporcionaban información relativa a sus imágenes. Posteriormente, se categorizó el contenido de la información obtenida desde cada instrumento en relación con la naturaleza de las Matemáticas, su enseñanza/aprendizaje y aquellos aspectos que se consideraron de interés. En ambos casos, se identificaron aquellos protocolos que proporcionaban información con respecto al origen de las imágenes, su contenido y sus características. A través de todos estos análisis, fueron emergiendo una serie de imágenes sobre las Matemáticas y su enseñanza/aprendizaje que a continuación pasamos a detallar. En primer lugar, describiremos las imágenes de los cuatro estudiantes para profesores como estudios de casos. Posteriormente, se compararán los datos de cada caso.

DESCRIPCION DE LOS CASOS

EL CASO DE CAP1: INFLUENCIA DE LAS EXPERIENCIAS PREVIAS COMO APRENDIZ EN EL CONTENIDO DE SUS IMÁGENES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Las imágenes de CAP1 sobre la enseñanza y el aprendizaje proceden de su experiencia previa con situaciones de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas, y están conectadas a una concepción de las Matemáticas escolares que sigue una perspectiva estructural, con énfasis en aspectos sintácticos.

– Las imágenes de la enseñanza de las Matemáticas. Qué y cómo se manifiestan

La única forma que conoce de enseñar Matemáticas es la del profesor que llega, da la clase, manda problemas, y el alumno hace los deberes en casa, señalando su dificultad en pensar que las Matemáticas se puedan enseñar de otra forma.

Entonces, como yo lo he visto así, lo he visto tantos años, durante el BUP, COU, la Universidad, y el método que siguen siempre es el mismo... (CAP1, 464-66) [Entrevista general].

Por otra parte, reconoce la necesidad de saber cómo estructurar la clase y cómo intentar conseguir que los niños entiendan las cosas (objetivo), pero duda de que eso se pueda aprender de manera reglada, indicando que cada uno se da cuenta por sí mismo (la experiencia como fuente del conocimiento necesario para enseñar). Sin embargo, «sabe» cuál es el contenido matemático que se debe enseñar:

no creo que nadie venga a decir: Venga, para enseñar funciones tienes que hacer esto, esto y esto, porque si no... además siempre hay que seguir unos pasos. Primero intentar darle la idea intuitiva de lo que es una función ... Luego ir ya formalizando... pero son pasos que a todos nos han tenido que enseñar (CAP1, 134-140) [Entrevista general].

Desde la forma en la que hace referencia al contenido matemático, se puede inferir una visión estructuralista de los conceptos matemáticos con un énfasis en aspectos sintácticos. CAP1 necesita situar los problemas siguiendo una ordenación del contenido. Esta idea de la organización de la enseñanza desde el punto de vista de «qué viene antes y qué viene después» en la organización del contenido matemático subyace en todos los protocolos. Para CAP1 el contenido matemático escolar sobre las funciones está organizado jerárquicamente, siguiendo un orden dentro del cuerpo organizado de conocimiento matemático (se introduce A porque se necesita para B). Esta aproximación de enseñanza de las Matemáticas, basada en la propia estructura del conocimiento matemático organizado, conlleva un énfasis en la secuencia jerárquica del contenido y tiene su reflejo en las imágenes sobre el aprendizaje.

– Las imágenes sobre el aprendizaje de las Matemáticas. Qué y cómo se manifiestan

Para CAP1, el conocimiento sobre la forma en que los alumnos aprenden nociones matemáticas concretas «puede aprenderse sobre la marcha», siendo un examen

el procedimiento para darse cuenta de si han aprendido. Además, para CAP1 aprender está muy ligado al esfuerzo personal:

... llega un momento que si tú quieres de verdad aprender y saber las cosas tienes que machacarte tú en buscarte los razonamientos (CAP1, 479-482) [Entrevista general].

El contenido de las imágenes sobre el aprendizaje se coloca en el manejo de destrezas y en ser «competentes» en «manejar» cierto aspectos del contenido. Por otro lado, tiene dificultades en conjeturar posibles procesos que deben emplear los estudiantes en la forma de resolver las tareas, por lo que se manifiesta cierto desconocimiento de las características del aprendizaje de la noción de función en los alumnos de estas edades. Ante la cuestión de cómo lo harían los alumnos en el apartado del análisis individual de las tareas, suele responder diciendo «no sé», «les cuesta mucho, ni idea», «mecánicamente». Los comentarios en los casos sobre las causas de las respuestas de los alumnos también son considerados de una forma genérica, como «no saben lo que es una función», «no saben lo que es una gráfica», o «que no tienen las ideas muy claras».

– Influencia de estas imágenes en la interpretación de las tareas escolares

Estas imágenes manifiestan su influencia a la hora de interpretar las tareas escolares. Con una imagen de la enseñanza de las Matemáticas fuertemente vinculada a la del «profesor tradicional», para CAP1 las tareas escolares son siempre vistas como algo que hay que hacer desde el punto de vista de «lo que te dan» y «lo que te piden». Lo que te piden se matiza en el sentido de que especifica lo que hay que hacer (sustituir valores, representar gráficamente...). Esta idea está presente en los dos criterios de clasificación de los problemas sobre funciones utilizados por CAP1 de forma espontánea. Así, en la primera clasificación, el criterio seguido es «lo que se pide» (apareciendo la expresión «tengo que» de

manera mayoritaria). En la segunda clasificación, el criterio escogido es «lo que tienes que usar» (usar las funciones –expresión algebraica– para resolver un problema). Para CAP1, las tareas se ven como aplicación de un contenido matemático explicado previamente. Este contenido matemático debe ser conocido, y los problemas son vistos como un medio para «ejercitar» (practicar). Por ejemplo, al preguntarle cuál sería el conocimiento previo necesario para resolver una determinada tarea, comenta:

Por supuesto, saber representar la función gráficamente [...] Imagino que tendría que saber todo lo que es una parábola, el vértice de una parábola... (CAP1, 1954-1960) [Análisis de tareas, problema D].

El «esfuerzo personal», que para CAP1 va vinculado al aprendizaje, sería una parte fundamental en la relación individuo/ tarea. De esta manera, «aprender» se identifica con «ser capaz de manejar, aplicar la «teoría» previamente explicada por el profesor».

Las imágenes sobre la enseñanza se manifiestan en la organización de las tareas proporcionadas «para enseñar funciones»:

más que una clasificación es un orden de como yo haría (colocaría en una secuencia) los problemas... como yo lo iría dando (CAP1, 1252-53, 1417) [Clasificación de tareas].

lo que le conduce a una ordenación de tareas en la que se manifiesta la influencia de la forma en que se concibe el contenido matemático (énfasis en aspectos estructurales), como se mencionó en el contenido de las imágenes sobre la enseñanza. Esta secuencia enfatiza la necesidad de «relacionar funciones y gráficas», que considera como ideas separadas.

Además, son tareas con funciones «fáciles» aquellas en las que se ve la función directamente. Y verse la función directamente implica expresiones algebraicas. La idea de dificultad aparece vinculada a expresiones superficiales como «fáciles o

difíciles» sin mención explícita a aspectos particulares del contenido. Los problemas que piden encontrar dominios, intervalos de crecimiento/decrecimiento, etc. son para CAP1 fáciles en cuanto a la «mecánica», pero difíciles en relación con la dificultad que presentan esas ideas.

EL CASO DE CAP3: EL PROFESOR COMO TRANSMISOR DE CONTENIDO MATEMÁTICO ESCOLAR

Para CAP3, las imágenes sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas están entrelazadas, siendo sus orígenes episodios concretos.

– Las imágenes de la enseñanza de las matemáticas. Qué y cómo se manifiestan

Al tratar de describir las características de la enseñanza que más le ha gustado, recuerda un profesor particular de la Universidad:

Esa forma de enseñar las Matemáticas... fue un profesor que tuve en mecánica... este hombre nos enseñó a... yo por lo menos fue allí donde lo aprendí, a ser mucho más pícaro con las Matemáticas [...] quizás sea unos de los casos más bonitos y que más me han agradado que me enseñaran y ha sido la cosa más original que yo he conocido en Matemáticas (CAP3, 579-83, 591-594) [Entrevista general].

mientras que, para referirse a la forma de enseñar Matemáticas que menos le ha gustado, hace referencia a unas características globales relacionadas con «las *personas que intentan darle rimbombancia a las Matemáticas...*» (CAP3, 687-695) [Entrevista general], abstraídas de una variedad de experiencias. Todos estas experiencias configuran el contenido de sus imágenes sobre la enseñanza de las Matemáticas, que se articulan sobre dos aspectos y sus relaciones: la naturaleza del contenido matemático y cómo transmitirlo (la enseñanza

como transmisión), como indica el siguiente protocolo:

Primero tener algo que enseñar. Saber por qué es importante que yo enseñe eso. Y... después... saber transmitir al alumno todas esas cosas que yo entiendo que es necesario para aprenderlas, y sabérselo decir bien para que las asimilen adecuadamente (CAP3, 59-62) [Entrevista general].

derivando no sólo una idea de transmisión de conocimientos sino de transmisión de actitudes. En esa transmisión, la actitud personal del que enseña juega para CAP3 un papel fundamental.

Por otro lado, «transmitir adecuadamente» a los alumnos el contenido conlleva para CAP3 la necesidad de estructurarlo:

el problema es cómo esos contenidos se van a estructurar para poder ser transmitidos a los alumnos (CAP3, 120-2) [Entrevista general].

Las relaciones entre la estructura del contenido y la transmisión se manifiestan en la forma en que describe cómo puede ser la enseñanza de las funciones. Una característica de esta relación es la parcelación del contenido, lo que le facilita, según la imagen de la enseñanza de CAP3, la organización de la secuencia de enseñanza y el aprendizaje de los alumnos. Esta característica es conforme con la visión que CAP3 tiene del contenido matemático, formado por un conjunto de «pedazos» que se pueden relacionar y conectar. Esto le permite enfrentarse a la enseñanza parcelando el contenido y presentándolo en «pequeños problemas» relacionados entre sí. De este modo, CAP3 dice que puede ayudar a mejorar la capacidad de razonamiento. Por consiguiente, reconoce la necesidad de tener una organización (secuencial) de la enseñanza dada a través del propio contenido:

Me haría falta tener un esquema general del proceso secuencial de enseñanza (CAP3, 97-8) [Entrevista general].

Este esquema secuencial se apoya en el contenido matemático según quedó

reflejado en los criterios utilizados en la clasificación y análisis de las tareas como, por ejemplo, la separación de las relaciones funcionales en lineales y no lineales y condiciona en gran medida la interpretación de las tareas.

- Las imágenes sobre el aprendizaje de las Matemáticas. Qué y cómo se manifiestan

Coherente con su imagen de la enseñanza como transmisión, para CAP3, las dificultades de los alumnos en el aprendizaje son entendidas como una explicación defectuosa:

la causa de que se produzca esto [error cometido por el alumno ante una tarea] es un fallo que ha habido en la introducción del concepto de función. No se le ha explicado bien al alumno lo que es una función (CAP3, 2027-2029) [Caso 1].

la razón es una falta al explicar las funciones (CAP3, 2056-2057)[Caso 2].

Por otra parte, y de acuerdo con su idea de parcelación de contenido como facilitadora de la organización de la secuencia de enseñanza, el aprendizaje de las Matemáticas se ve como un proceso de escalonamiento en el que es necesario aprender unas cosas para poder aprender las que siguen a continuación. Establece una distinción entre problema y ejercicio. En el problema, el alumno debe apoyarse en lo que sabe y utilizarlo en la resolución y sirve de anclaje a unos conceptos que se acaban de dar, concretando la explicación.

Otro aspecto del contenido de las imágenes sobre el aprendizaje nos lo proporciona el hecho de que para determinadas tareas CAP3 considera que hay que «acompañar» al alumno en su resolución y en otras, el alumno puede enfrentarse a la tarea sin ayuda. También establece una diferenciación entre fallos individuales, que implicarían que un *tratamiento sería muy específico de cada alumno* o colectivos, que supondrían para el profesor *volver hacia atrás*. Además, CAP3 vincula al

aprendizaje de las Matemáticas escolares a la motivación, destacando su importancia como medio de *enganchar al alumno*.

- Influencia de las imágenes en la interpretación de las tareas escolares

A través de la clasificación y análisis de las tareas, se pone de manifiesto el papel predominante que para CAP3 desempeña el contenido matemático para articular la enseñanza. Le parece fundamental lo relativo al diseño de tareas y actividades, ya que es el paso del «conocimiento que tiene el profesor» a «transmitirlo a otros», señalando que:

la clave fundamental es ... el paso que va desde el profesor que tiene un conocimiento del contenido, y lo tiene él, y ahora dice: «Este contenido tengo que... transmitirlo a otros individuos... entonces el saber plantear ejercicios, el saber plantear cosas que vayan ayudando al alumno a entender las cosas, assimilarlas, a hacerlas suyas, a hacerlas propias... eso es fundamental (CAP3, 473-476) [Entrevista general].

Así, las tareas son vistas como algo que ayuda al alumno a entender y asimilar conceptos, y los fallos (las dificultades de aprendizaje) serían defectos en la transmisión (explicaciones defectuosas).

La organización del contenido matemático es el criterio utilizado en la clasificación de las tareas independientemente de que la perspectiva fuese la enseñanza o el aprendizaje. Las tareas se ven con relación a si las funciones que aparecen son lineales o no lineales. Es el contenido matemático de la tarea el que le sirve también para establecer las dificultades de aprendizaje: las tareas fáciles son las que contienen funciones lineales y tareas difíciles son las que contienen funciones no lineales. Al plantearle si hubiera salido una clasificación parecida si el criterio hubiera sido dificultad de aprendizaje, señala en su respuesta:

... primero irían las funciones lineales, dentro de las funciones lineales parecería las

que tienen una formulación estrictamente matemática, aplicarían esos conocimientos [...] y creo que los que más grado de dificultad requieren son en este caso los no lineales (CAP3, 998-1000; 1003-4) [Clasificación de tareas].

Y también para la secuencia de enseñanza: primero las lineales y luego las no lineales, con la salvedad de la introducción de lo que es función, como se ha puesto de manifiesto en el protocolo de la sección anterior. Además, el proceso de escalonamiento que es para CAP3 el aprendizaje influencia la forma de considerar la necesidad del uso de determinadas tareas para organizar la secuencia de enseñanza

Éstos son los aspectos a través de los que CAP3 «ve» las tareas con funciones. En este sentido, esos aspectos forman parte de las diferentes perspectivas a través de las que CAP3 hace operativas sus imágenes de la enseñanza y aprendizaje en la interpretación de las tareas. Por otro lado, la vinculación que establece entre aprendizaje y motivación le lleva a considerar la necesidad de utilizar tareas que permitan motivar (enganchar) al alumno, aunque no establece características concretas que deben cumplir las tareas para lograr motivar.

EL CASO DE CAP4. LAS CONCEPCIONES SOBRE LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SU INFLUENCIA EN LAS IMÁGENES SOBRE LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

– Las imágenes de la enseñanza de las Matemáticas: Qué y cómo se manifiestan

Las imágenes sobre la enseñanza de las Matemáticas de CAP4 derivan, tanto en su aspecto negativo como en el positivo, de memorias concretas relacionadas con diferentes profesores y de sus concepciones sobre las Matemáticas. Otros contenidos de

sus imágenes de la enseñanza de las Matemáticas proceden de su forma de concebir las Matemáticas. Para CAP4, las Matemáticas son «un conjunto de instrumentos que se utilizan mucho». Una consecuencia para la enseñanza es «tener que explicar la utilidad de las Matemáticas». La motivación es el vínculo de unión entre este objetivo de la enseñanza y el aprendizaje:

Es lo que me gustaría intentar, que tuviesen un mínimo de motivación. No lo voy a conseguir con toda la clase. A lo mejor, incluso el primer año no lo consigo con nadie, ¿no? Pero pienso que eso es fundamental a la hora de... ser un profesor. Intentar captar el interés y explicarles, saber explicarles la utilidad de la asignatura (CAP4, 120-125) [Entrevista general].

Las Matemáticas son útiles, y si se puede dar a un alumno, se les puede ver la utilidad antes de que ellos se den cuenta, mejor, porque así lo aprenden con más ganas (CAP4, 646-648) [Entrevista general].

Por otro lado, considera necesario tener unos objetivos relacionados con un determinado contenido matemático que guíen la enseñanza. Al preguntarle sobre las tareas o los ejercicios que se pueden proponer a los alumnos, indica:

yo pienso que ... siempre que tienes unos objetivos y quieres que los alumnos aprendan, que te lo profundicen un determinado conocimiento. Pues tú debes saber como hacer las cosas, como diseñar las actividades para lograr eso que quieres. Por supuesto que tienes que tener una idea... (CAP4, 413-417) [Entrevista general].

Este «cómo hacer las cosas» queda reflejado en su secuencia hipotética del contenido en el tema funciones, en la que el énfasis se coloca sobre aspectos meramente sintácticos, con poca atención a la noción de relación entre variables y covariación. Lo «intuitivo» es entendido como tablas, posiblemente por el carácter discreto de los valores frente a la idea de «gráfica».

– Las imágenes sobre el aprendizaje: Qué y cómo se manifiestan

Con respecto a la forma de aprender Matemáticas, CAP4 vincula los aspectos positivos de su aprendizaje a la satisfacción que produce ver que los instrumentos que proporcionan las Matemáticas «funcionan». Para CAP4, el comprender los aspectos teóricos y disfrutar cuando salen las cosas se relaciona con un «pasatiempo» gratificante. Los aspectos negativos de su aprendizaje permanecen ligados a una enseñanza «desordenada»:

... te explicaban límites, te explicaban teoría, te explicaban lo que era la integral definida... tú te ibas a los boletines y al final sabías que no te iban a salir y sabías que no era cosa tuya... y ya te resignabas, pero al principio... Esa ha sido la peor manera que yo he tenido de aprender Matemáticas (CAP4, 617-622) [Entrevista general].

Con relación a las dificultades de aprendizaje del contenido matemático de los alumnos del Secundaria, CAP4 usa expresiones como «mal aprendizaje», que tiene distintos orígenes: «falta de asimilación del concepto», un «procedimiento algorítmico muy mal cogido» o una «confusión o no tener claro qué es lo que tiene que variar en una función», que vincula a un desconocimiento de los instrumentos y conceptos que se necesitan para resolver el problema. Coherente con este punto de vista, ve como soluciones el volver a enseñarlos. De este modo, las imágenes sobre el aprendizaje de CAP4 parecen relacionadas con el manejo de los aspectos sintácticos que caracterizan su secuencia hipotética de contenido. Para CAP4, aprender es una cuestión de asimilar la información proporcionada previamente por el profesor.

– Influencia de estas imágenes en la interpretación de las tareas matemáticas escolares.

La idea del trabajo en grupo, que se identifica en la parte positiva de sus imáge-

nes sobre la enseñanza, se manifiesta cuando se le plantea cómo enseñaría él una determinada tarea:

Pero si veo que el problema es fácil y parte de la experiencia, por ejemplo, yo los pondría a hacerlo en grupo directamente, porque no es... no parece un problema demasiado difícil, según... (CAP4, 1572-1575) [Análisis de tareas, Tarea D].

En estos comentarios parece apreciarse que las tareas consideradas como fáciles son las que permiten un trabajo en grupo, asociándose el aumento de dificultad a la necesidad de trabajo individual. Por otro lado, aunque en sus planteamientos generales sobre la enseñanza, la motivación y el captar el interés ocupan un papel relevante, considerándose los vínculos con el aprendizaje, no se mencionan apenas en las tareas. Parece que se vinculan más a la propia actuación del profesor, ya que, cuando menciona qué le parecería necesario saber para desempeñar su futuro trabajo como profesor, destaca aspectos relacionados con motivar a los alumnos, hacerles la asignatura interesante, saber captar su interés, etc., que son planteamientos generales no específicos de la enseñanza de las Matemáticas.

Su forma de concebir las Matemáticas se pone de manifiesto en su interpretación de las tareas escolares. Los problemas que obedecen a lo que CAP4 considera contextos reales ayudan a darse cuenta de que una herramienta como es la Matemáticas puede servir para resolver esas situaciones reales, y eso es precisamente lo que aprende el alumno cuando se le plantean este tipo de problemas:

Pues este tipo de problemas... obedecen a un caso real... Entonces, el alumno puede darse cuenta de que... una herramienta como es las Matemáticas le puede servir a lo mejor para resolver un caso real (CAP4, 1206-1208) [Análisis de tareas, Tarea C].

CAP4 ve las tareas escolares como un medio de profundizar en el conocimiento

matemático, siendo los ítems de conocimiento matemático la «guía» en la organización de tareas para la enseñanza. Sus imágenes de la enseñanza, en las que se vinculan los objetivos con el contenido matemático, se ponen de manifiesto al comentar qué tareas de las planteadas considera necesarias que las hagan los alumnos. Éstas se identifican con un objetivo concreto (interesan para luego, manera sencilla de introducir la función, etc.), siendo también un contenido matemático específico todo lo que se puede aprender con esas tareas. Al comparar la secuencia de contenido que proporciona al sugerirle el investigador cómo enseñaría las funciones (indicada en apartados anteriores), y la clasificación espontánea que realiza según un criterio de dificultad se aprecia que los problemas que considera como fáciles son los situados al principio de la secuencia, y los difíciles, al final. Las imágenes sobre la enseñanza muestran una doble cara. Por una parte, organizadas a través de un índice de contenido matemático y solapado con este índice una «valoración» de fácil o difícil desde el principio al final del tema. Sin embargo, las valoraciones realizadas son siempre vagas y sin ninguna justificación (lo fácil es lo que viene delante en el tema y lo difícil lo que viene después).

EL CASO DE CAP5. LA MOTIVACIÓN

- Las imágenes de la enseñanza de las Matemáticas. Qué y cómo se manifiestan

Una parte positiva de sus imágenes sobre la enseñanza de las Matemáticas está vinculada a experiencias previas. Para CAP5, enseñar se considera gratificante y la enseñanza es vista como comunicación y está vinculada a la motivación:

Siempre que he estado estudiando me he imaginado, cuando no podía estudiar porque no me gustaba mucho... que lo que yo

estaba aprendiendo se lo estaba enseñando a la gente. Y entonces me resultaba muy atractivo... y enseñar me resultaba gratificante y... esa comunicación es algo que no es cerrado, que no se queda en ti mismo (CAP5, 39-44) [Entrevista general].

Cuando se plantea que indique una forma de enseñar Matemáticas que ha visto y que no le haya gustado, menciona como característica la falta de comunicación. Todo esto va configurando el contenido de sus imágenes de la enseñanza, en las que podemos destacar tres características: la enseñanza como comunicación, motivación (necesidad de punto de enganche) y secuencia de enseñanza vinculada a un orden. Estas tres características de la imagen de la enseñanza se articulan en «su estructura de una clase»:

... a mí me gusta mucho la siguiente estructura, la forma de dar clase. Primero motivar, dando a conocer al alumno que ese problema que tú vas a explicar... o esa teoría matemática proviene a lo mejor de unos hechos reales de la naturaleza. Una vez que has motivado, dar la idea de... la idea matemática general, la idea superficial, geométrica, del desarrollo que vas a hacer. Luego enunciar el teorema o lo que vas... las definiciones correspondientes, y una vez que ya tienes que demostrar, pues dar una idea de la demostración. [...] y al final concluyes, y haces a lo mejor las observaciones que tengas que hacer (CAP5, 350-358, 359-365) [Entrevista general].

La búsqueda de una buena comunicación se pone de manifiesto en que siempre busca un diálogo directo con el hipotético alumno al que van dirigidos sus comentarios:

Plantearía el problema lo más real posible, ¿no? Acercándolo lo más posible a la realidad del alumno. Y luego, pues lo haría en la pizarra... dibujaría la ciudad: «¿La ves?, el segmento que las une, ¿no?» ... un par de flechas indicando un poco [...] y luego, depende ¿no?, si es el primero que le fuera a hacer... pues se lo haría (CAP5, 1461-1469) [Análisis de tareas, tarea E].

Esta aproximación a la enseñanza se vincula a una determinada «filosofía» con relación a las Matemáticas reflejada en el siguiente comentario:

Yo creo que lo primero que hace falta es que el alumno reconozca la matemática como un juego, como un mecanismo que es divertido y que funciona siempre bien (CAP5, 112-114) [Entrevista general].

La visión de las Matemáticas como un juego permite concebir algunos aspectos de la enseñanza. Así, ésta se considera como algo en lo que se participa y que produce satisfacción. Para fomentar esa participación, es fundamental una buena comunicación entre profesor y alumno.

- Las imágenes del aprendizaje: Qué y cómo se manifiestan

Las ideas de «diversión» (en el sentido, mencionado en protocolos anteriores, de que cualquier cosa que aprendas tiene que ser divertida) y «satisfacción» permanecen vinculadas a lo que CAP5 considera su aprendizaje más positivo.

Con respecto a los alumnos, aparecen escasas referencias al aprendizaje. El análisis de las situaciones hipotéticas hace referencia a ideas previas erróneas, sin más matizaciones, tal y como se manifiesta en el siguiente protocolo:

Pues simplemente, que tiene una idea a priori de lo que es una función errónea, tal y como se ha dado en clase, ¿no. No tiene bien asimilado el concepto de función (CAP5, 1870-1873) [Caso 2].

Podríamos decir que sus imágenes sobre el aprendizaje no le permiten establecer diferencias entre los distintos tipos de dificultades de los alumnos puestas de manifiesto en las respuestas a las situaciones hipotéticas, viendo todas esas dificultades desde una perspectiva general como «falta» de conocimientos adecuados.

- Influencia de estas imágenes en la interpretación de las tareas matemáticas escolares

Una característica relevante en la forma en que se contemplan las tareas es la perspectiva general adoptada poco específica del contenido matemático. Las ideas principales que se manifiestan son el lenguaje con el que se redacta el problema, la posibilidad de motivación, vinculada al contexto real del problema, y aspectos relativos a las Matemáticas como modelación. Sólo se hace mención del contenido matemático cuando intenta justificar el uso de «tareas técnicas» (sin contexto real) como una manera de mostrar aspectos de la estructura matemática de una situación (se refleja así su visión de las Matemáticas como modelación de la realidad). La importancia que CAP5 da a la comunicación en el proceso de enseñanza de las Matemáticas, ligada a la parte positiva de sus imágenes sobre la enseñanza, se pone de manifiesto en algunas de las clasificaciones que establece en las tareas propuestas.

Ese papel destacado de la comunicación se aprecia cuando establece criterios de clasificación como el de «problemas sencillos y aparatosos» (considerados como problemas largos como mucho enunciado), vinculados a la idea de que la comunicación no debe ser sólo de carácter verbal, sino que el propio texto del problema puede facilitarla:

Los problemas que son largos... que se ve mucho enunciado, ¿no?, que resultan aparatosos... echan un poco para atrás y de un poco de pereza abordarlos. Entonces es bueno cautivar al alumno con el enunciado... porque si no lo cautivas desde el principio... te cuesta trabajo conseguirlo (CAP5, 650-655) [Clasificación de tareas].

Otro de los aspectos del contenido de sus imágenes sobre la enseñanza está relacionado con la motivación, que aparece vinculada a las tareas «relacionadas con la realidad» (lo que le permite establecer una separación entre los problemas que son reales frente a los problemas puramente matemáticos). Así, considera criterios como problemas que son reales «que atraen más

al individuo», frente a problemas que son puramente matemáticos o «problemas que te inducen a pensar» frente a problemas que «si no te salen a la primera los abandonas». Los problemas no vinculados a situaciones reales se considera que muestran el «esqueleto» de una situación real.

Por ejemplo, éste. «Se sabe que la función $y = x^2 + bx + c$ pasa por el punto (1,1), por el punto (1,0) y por el punto (-1,1). Calcula b y c». Bueno, estoy utilizando, no sé, el ejemplo más típico, ¿no? Pero este problema es más bien matemático, y al individuo no le relaciona ese problema con su vida, ¿no? Lo importante es que el problema tenga algo que ver con su vida, con sus problemas, con sus... ilusiones. Entonces, no, este problema no lo produce (CAP5, 582-587) [Clasificación de tareas].

La imagen del aprendizaje como algo satisfactorio se refleja en el énfasis que coloca en la satisfacción que produce en el individuo la realización de la tarea conectando la motivación y vinculación al mundo real con la necesidad del contenido matemático:

Yo comenzaría motivando al alumno a la necesidad del estudio de las funciones, ¿no?, y de su representación gráfica, mediante problemas reales. Y luego, una vez ya los hubiere motivado, aunque fuera un poco, empezaría con este tipo de problemas que son tan técnicos (CAP5, 1091-1094) [Análisis de tareas, tarea A].

Su consideración de las Matemáticas como algo atrayente, un «juego» en el que hay que participar, se vincula en las tareas a la idea del interés que puede suponer involucrarse en la resolución de las mismas. Este aspecto de sus imágenes de la naturaleza de las Matemáticas (Matemáticas como un juego) influencia en alguna medida su forma de considerar lo que supone resolver las tareas para el resolutor: el participar en un juego es algo grato (vinculado a la idea de aprendizaje positivo) y los juegos son algo que despiertan curiosidad en el que participa. En la justificación que da a

la necesidad de plantear tareas sin contexto (técnicas) es que son el «esqueleto de una situación real». Esto puede interpretarse como que, aunque no son situaciones reales (que para él eran las más idóneas por atrayentes y motivadoras), bajo el punto de vista matemático le parecen adecuadas y necesarias:

Aunque puede ser aburrido en principio, es necesario que el alumno tome manejo del mecanismo este del cálculo de máximos y mínimos, de puntos de inflexión [...]. Porque luego en la práctica cuando le aparezca un problema real tendrá que pasarlo a modelo matemático y ver matemáticamente el comportamiento de la función máximos y mínimos. Entonces, sí que le hará falta recurrir a este tipo de problemas. O sea, éste es quizás el esqueleto de un problema real, ¿no? El problema real no aparece, pero es el esqueleto de un posible problema real (CAP5, 997-1000) [Análisis de tareas, tarea A].

DISCUSIÓN

Esta sección está dividida en dos apartados: el primero de ellos se centra en las reflexiones sobre el origen y contenido de las imágenes de los estudiantes para profesores de Secundaria sobre la enseñanza, las Matemáticas y el aprendizaje. En el segundo, se tiene en cuenta cómo determinan estas imágenes la forma en que se consideraron las tareas con funciones (cómo se conciben las tareas en la enseñanza y cuál es su papel).

ORIGEN Y CONTENIDO DE LAS IMÁGENES: LA INFLUENCIA DE LAS IMÁGENES DE LAS MATEMÁTICAS SOBRE LAS IMÁGENES DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Desde la caracterización teórica del término «imagen» para referirnos a ciertos aspectos de las concepciones de los estudiantes para profesor que la literatura ha estado

utilizando hasta estos momentos, cabe reseñar la importancia que tiene la experiencia previa en determinar algunos aspectos del contenido de las imágenes, apreciándose la gran vinculación entre las experiencias pasadas y la formación de las imágenes. El análisis realizado ha puesto de manifiesto la diversidad en el contenido (general y específico de las Matemáticas) de las imágenes de la enseñanza/aprendizaje de los estudiantes para profesores de Matemáticas de Secundaria participantes en el estudio. Estos aspectos están bastante entrelazados pero es necesario separar sus fuentes (la experiencia: memorias episódicas) del contenido (de qué van las imágenes: perspectiva general o disciplinar) para intentar extraer mejores implicaciones para los programas de formación. En la primera dimensión, desde una perspectiva general, la enseñanza es vista como sucesión de pasos, transmisión, manejo de instrumentos útiles, como comunicación, y el aprendizaje está vinculado al esfuerzo personal, a una buena transmisión por parte del profesor o a la satisfacción personal (desde un punto de vista utilitario o simplemente de diversión).

La segunda dimensión que es preciso considerar en el contenido de las imágenes sobre la enseñanza y aprendizaje es la perspectiva disciplinar (enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas). Esta dimensión es la que marca cierta diferencia. Aquí se considera la influencia de la imagen de la naturaleza de las Matemáticas como disciplina sobre las imágenes de la enseñanza y las imágenes del aprendizaje. Mientras las imágenes sobre las Matemáticas parecen influir en las imágenes sobre la enseñanza (las Matemáticas como un conjunto organizado de conocimiento, conjunto de instrumentos, una visión más caleidoscópica que Matemáticas como juego, estructura y modelación de la realidad), esta influencia no es tan clara para las imágenes del aprendizaje de las Matemáticas. Se subraya así que las imágenes sobre la naturaleza de las

Matemáticas parecen influir más sobre las imágenes de la enseñanza que sobre las del aprendizaje. La influencia de las imágenes sobre las Matemáticas escolares en las imágenes sobre la enseñanza de las Matemáticas se manifiesta en:

- cuando las Matemáticas son vistas como un cuerpo de conocimiento organizado jerárquicamente (CAP1), la enseñanza es vista como una secuencia de pasos donde el contenido matemático indica qué viene antes y qué viene después;
- cuando las Matemáticas se ven organizadas a través de grandes temas, articulados a través de pequeños «pedazos» relacionados, la enseñanza es vista como una transmisión organizada secuencialmente a través del contenido (CAP3);
- cuando las Matemáticas son vistas como un conjunto de instrumentos, vinculada a la idea de que son útiles, la enseñanza tiene como objetivo el aprendizaje de estos instrumentos (CAP4);
- finalmente, cuando las imágenes sobre la naturaleza de las Matemáticas son más «caleidoscópicas» (Matemáticas como juego, estructura, énfasis en la unidad y la relación de las partes y como modelación de la realidad), la enseñanza está vinculada a la motivación y una estructura de la clase apoyada en la secuencia: motivar, dar la idea matemática, enunciar teoremas/definiciones, demostrar, hacer tareas (CAP5).

Con relación al aprendizaje, lo más relevante es que son planteamientos generales, no específicos del aprendizaje de las Matemáticas. Las referencias al aprendizaje están vinculadas a su propia experiencia de aprendizaje de las Matemáticas. Así, éste se corresponde a expresiones como «vinculado al esfuerzo personal», «el aprendizaje depende de la transmisión», «aprendizaje

como satisfacción de ver cómo funcionan los instrumentos o las herramientas útiles y «el aprendizaje vinculado a la satisfacción personal que produce (aprender es divertido)». En CAP1 y CAP5, el contenido de las imágenes del aprendizaje se centra en el aprendiz, mientras que en CAP3 el eje sobre el que gira el contenido de estas imágenes es el profesor, vinculándose en CAP4 el contenido matemático y la satisfacción personal.

PAPEL QUE DESEMPEÑAN LAS IMÁGENES EN LA INTERPRETACIÓN DE LAS TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Considerando las tareas matemáticas escolares como uno de los medios a través de los que el profesor desarrolla su trabajo con los alumnos, se plantea entonces el papel que desempeñan las imágenes sobre la enseñanza, el aprendizaje y la naturaleza de las Matemáticas escolares al interpretar dichas tareas. La influencia de las imágenes sobre las tareas se manifiesta en la forma en que los estudiantes para profesor consideran el papel de las tareas en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

El contenido de sus imágenes sobre la enseñanza es precisamente el que mediatiza el papel que los estudiantes para profesor dan a las tareas en el proceso de enseñanza/aprendizaje. De esta manera, si en el apartado anterior veíamos la vinculación existente entre las imágenes de la naturaleza de las Matemáticas con las imágenes de la enseñanza, aquí se muestra otro eslabón de estas relaciones. Ese papel que desempeñarían las tareas en el proceso de enseñanza/aprendizaje nos permite profundizar en el contenido de las imágenes que mantenían los estudiantes para profesor. Para los tres primeros (CAP1, CAP3 y CAP4), las tareas desempeñan el papel de proporcionar práctica de un contenido previamente dado por el profesor. Ahora bien, con los matices descritos en la sección

anterior, se deja entrever en ellos unas concepciones de las Matemáticas como cuerpo de conocimiento, más o menos estructurado. Sin embargo, en las imágenes de la naturaleza de las Matemáticas y sus implicaciones en la enseñanza estos matices se difuminan al identificarse el mismo objetivo para las tareas en la secuencia de enseñanza. Para estos tres estudiantes, se destaca la idea de «aplicación» que desempeñan las tareas. Se manifiesta la ausencia de cualquier referencia a la idea de construcción del conocimiento y aspectos particulares del aprendizaje de tópicos matemáticos concretos. Por otra parte, en CAP5 no se identifica claramente el papel que deben desempeñar las tareas en la secuencia de enseñanza.

Los diferentes papeles desempeñados por las imágenes de la enseñanza y el aprendizaje, descritos en estos estudios de casos, aportan ideas sobre los referentes cognitivos con los que los estudiantes para profesor de Matemáticas de Secundaria pueden interpretar la información proporcionada en los programas de formación. Esto conduce a plantear cuestiones referidas a un doble equilibrio entre la perspectiva general frente a la perspectiva disciplinar, y la enseñanza frente al aprendizaje. En este sentido, programas de formación de profesores de Matemáticas con un cierto énfasis en el curriculum de Matemáticas, organización de la enseñanza, diseño de tareas, etc. pueden estar tratando sólo ciertos aspectos del conocimiento necesario para enseñar Matemáticas. De aquí surge la siguiente cuestión: ¿cuál debería ser el equilibrio en los programas de formación entre la información relativa a la «enseñanza» y al «aprendizaje» de las Matemáticas?

Nuestro análisis ha mostrado que las imágenes con las que los estudiantes para profesor de Matemáticas de Secundaria llegan al programa no se «refieren» en la misma medida a la enseñanza y al aprendizaje. Por otra parte, esta situación nos plantea

cómo integrar en formación de profesores planteamientos generales sobre la enseñanza y el aprendizaje que sean compatibles con unas determinadas filosofías de las Matemáticas (naturaleza del conocimiento matemático), y nos lleva a añadir una nueva cuestión: ¿hasta qué punto los programas de formación de profesores de Matemáticas de Secundaria pueden mantener la integración de perspectivas generales sobre la enseñanza y el aprendizaje con las derivadas de la disciplina?

Todas estas preguntas inciden directamente en el diseño y organización de los programas de formación de profesores de Matemáticas de Secundaria. El contexto específico de la formación inicial de los profesores de Secundaria en España plantea una particular reflexión. Los futuros profesores reciben una amplia formación en Matemáticas (o en otras licenciaturas científicas) cuando se matriculan en el programa de formación de profesores (CAP o CCP). A través de esta formación previa, estos estudiantes pueden haber construido unas imágenes sobre las Matemáticas y su enseñanza-aprendizaje, que influyen en la manera en que ellos llegan a caracterizar sus experiencias de aprender a enseñar y su futuro papel como profesores. Considerar estas influencias junto con la búsqueda de equilibrio en el contenido de esos programas entre información centrada en curriculum y la información procedente de cómo los alumnos aprenden (información desde las investigaciones sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas) es una tarea que los formadores de profesores deben abordar. Por último, no podemos terminar estas páginas sin hacer referencia a la colaboración prestada por los alumnos del Curso de Aptitud Pedagógica que aceptaron participar en este estudio. Su interés y esfuerzo en contribuir en todo aquello que pudiese mejorar su futura labor como profesores de Matemáticas han sido para nosotros un estímulo en el desarrollo de este trabajo.

- BALL, D. L.: «Unlearning to teach mathematics», en *For the Learning of Mathematics*, 8 (1988), pp. 40-48.
- «Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division», en *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (1990), pp. 132-144.
- BALL, D. L.; McDIARMIND, G. W.: «The Subject-matter preparation of Teachers», en W. R. HOUSTON (Ed.): *Handbook for Research on Teacher Education*, New York, Macmillan, 1990.
- BRANCO, I.; OLIVEIRA, I.: «Teachers images about learning mathematics and professional development». Paper presented at the European Conference on Educational Research, Sevilla, September, 1996.
- CALDERHEAD, J.: «The nature and growth of knowledge in student teaching», en *Teaching and Teacher Education*, 7 (5/6) (1991), pp. 531-535.
- CALDERHEAD, J.; ROBSON, M.: «Images of teaching: student teachers' early conceptions of classroom practice», en *Teaching & Teacher Education*, Vol. 7, No.1 (1991), pp. 1-8.
- CLANDININ, D. J.: *Classroom practice: Teacher images in action*. London, Falmer Press, 1986.
- CONNELLY, F. M.; CLANDININ, D. J.: «Personal Practical knowledge and the Modes of Knowing: Relevance for Teaching and Learning», en EISNER & ELLIOR (ed.): *Learning and teaching the ways of knowing. Eighty Fourth Yearbook of the National Society for the Study of Education, part 2*, Chicago, University of Chicago Press, 1985.
- ERAUT, M.: «Knowledge creation and knowledge use in professional context», en *Studies in Higher Education*, 10 (1985), pp. 117-133.
- ELBAZ, F.: *Teacher thinking: A study of Practical knowledge*. New York, Croom Helm, 1983.

- GARCÍA, M.; LLINARES, S.: «Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. El desarrollo de un proceso en el caso de las funciones», en *Suma*, 18 (1995), pp. 13-23.
- GATES, P.: «Frames for teaching», en J. P. PONTE ET AL. (eds.): *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática. Que Formação?*. Secção de Educação Matemática. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1996.
- HANNAY, L. M. «The Role of Images in the Secondary School Change Process», en *Teachers and teaching: theory and practice*. Vol. 2, No. 1 (1996), pp. 105-121.
- JOHNSTON, S.: «Images: A way of understanding the practical knowledge of students teachers», en *Teaching & Teacher Education*, Vol. 8, No. 2 (1992), pp. 123-136.
- LLINARES, S.: «Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en Relación a la Noción de Función», en *Desenvolvimento Profissional dos Professores da Matemática. Que Formação?*. Secção de Educação Matemática. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1996, pp. 47-82.
- LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V.: «The understanding of mathematical topics and instructional representations: the case of fractions and rational number by prospective elementary teachers», en GIMÉNEZ, LLINARES & SÁNCHEZ (eds.): *Becoming a Primary Teacher. Issues from Mathematics Education*. Badajoz, Indugrafic, 1996.
- MORINE-DERSHIMER, G.: «Teacher plan and classroom reality: The S. Bay Study, part 4», en *Research monograph series*. Institute for Research on Teaching. University of Michigan, 1979.
- MURA, R.: «Images of Mathematics Held by University Teachers of Mathematics education», en *Educational Studies in Mathematics* 28 (4) (1995), pp. 385-399.
- ROULET, G.: «Subject Integration and Mathematics Teachers' Practical Knowledge, en *Teachers and teaching: theory and practice*. Vol. 2, No. 1 (1996), pp.87-103.
- SÁNCHEZ, V.; LLINARES, S.: «Habitual school practices and problem solving situations: The case of Carlota», en GIMÉNEZ, LLINARES & SÁNCHEZ (eds.): *Becoming a Primary Teacher. Issues from Mathematics Education*. Badajoz, Indugrafic, 1996.
- «How prospective secondary teachers think about mathematics tasks». Paper presented at the European Conference on Educational research. Sevilla, September, 1996.
- THOMPSON, A. G.: «Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of research», en D. A. GROUWS (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* New York: Macmillan, 1992, pp. 127-146.
- WILSON, S. M.; SHULMAN, L.; RICHERT, A. E.: «150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching, en J. CALDERHEAD (ed.): *Exploring teachers' thinking* (pp. 104-124). London, Cassell, 1987.