Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje

Conception of teachers about proofs and dynamic software. Development of a virtual learning environment

Germán Torregrosa-Gironés
Universidad de Alicante. Facultad de Educación. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Alicante, España.
María José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete, España
María del Carmen Penalva Martínez
Salvador Llinares Ciscar
Universidad de Alicante. Facultad de Educación. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Alicante, España.

Resumen

En este trabajo se analizan: (i) las concepciones de los profesores sobre la demostración matemática, puestas de manifiesto cuando participaban en un entorno virtual de aprendizaje y (ii) la influencia que sobre dichas concepciones tiene la resolución de problemas de probar usando *software* dinámico. Los profesores resolvieron diferentes problemas geométricos de probar utilizando *software* dinámico de Geometría y sin utilizarlo, participaron en foros virtuales y analizaron actividades instruccionales, que tenían como objetivo promover el desarrollo de demostraciones en los estudiantes de Educación Secundaria. El diseño de la investigación realizada es del tipo «desing research-based» en un contexto de aprendizaje (Cobb, P. et al., 2003). El análisis de los datos siguió un proceso inductivo para identificar diferentes perfiles de los profesores. Los resultados indican que los profesores mantenían concepciones duales sobre la prueba al considerarla como un objeto de enseñanza en la educación secundaria y como un instrumento en el campo de las matemáticas, como ámbito científico. Los profesores mantenían

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

tres funciones específicas de la prueba: convencer-comunicar, verificar y sistematizar. En cuanto a la influencia del uso de *software* dinámico sobre las concepciones de la prueba, en los diferentes estudios de caso generados, la función explicativa de la prueba aparece como una herramienta para convencer y los profesores ven útil el uso del software dinámico durante la resolución de los problemas para potenciar esta función. Los profesores consideraban que el *software* dinámico permitirá realizar comprobaciones en casos particulares, que ayudarán a establecer la diferencia entre comprobar y generalizar. Estos resultados sugieren que la estructura del entorno virtual y el tipo de tareas que los profesores tuvieron que realizar, influyeron en la generación de las reflexiones de los profesores sobre las relaciones de los contextos dinámicos y estáticos para el desarrollo de la prueba, y en el análisis de actividades instruccionales para sus alumnos.

Palabras clave: concepciones profesores, prueba, software dinámico, entornos virtuales, resolución de problemas.

Abstract

The goal of this research was to analyze (i) mathematics teacher's conceptions of mathematical proof when they participate in an interactive virtual learning environment, and (ii) how solving geometrical proof problem using dynamic geometrical software influences their conceptions. Teachers solved different geometrical problems using and without using dynamical software, participated in virtual debates and analyzed a sample of high school tasks of geometrical proofs. Research design was a «design research-based» in learning context (Cobb, P. et al, 2003). The analysis of the data followed an inductive process in order to identify and characterize several profiles in relation to teachers' conceptions of proof. The findings pointed out by those teachers held dual conceptions of proof, according to this, it was considered as school content or as a mathematician activity. We identified three profiles considering the functions of proof that teachers underlined: to convince-communication, to verify and to systematize. Regarding the influence of the use of dynamic software on the conceptions of proof in the different case studies generated, the function of explaining appears as a tool to convince others and the dynamic software is used to enhance this feature. Teachers thought that dynamic software would allow to check on particular cases helping to establish the difference between checking and generalizing. The findings suggest that the structure of virtual learning environment and the tasks that they had to solve influenced the thoughts of the teachers about the relationships between dynamic and static context to make proofs in the analysis of instructional activities.

Key words: teachers' conceptions, proof, dynamic software, virtual environment, problem solving.

El proceso de probar como contenido matemático en la Educación Secundaria. El papel del profesor de matemáticas

A pesar de las recomendaciones sobre la necesidad de introducir el trabajo con pruebas en el aula desde edades tempranas, esta tarea no termina de desarrollarse (Boero, 2007; Hanna & Jahnke, 1996). Las investigaciones están subrayando la influencia del profesor en el tipo de significados que los estudiantes asocian al proceso de probar (Stylianides, 2007; Stylianides et al., 2007; Knuth, 2002a, 2002b) puesto que las concepciones del profesor sobre la prueba influyen en las características de la enseñanza que desarrolla en el aula (Putnam y Borko, 1997). Por ejemplo, los resultados de la investigación de Knuth (2002a, 2002b) indican que los profesores asignaban a la prueba diversas funciones pero, cuando trabajan con ella en secundaria, creen que sólo es apropiado hacerlo con una minoría de estudiantes (los de mayor competencia curricular) y la consideran más como un tópico que estudiar, que como una herramienta para comunicar y aprender matemáticas. Para los profesores que participaron en esta investigación, la prueba era un medio para verificar y comunicar contenido matemático, que convencía de la validez de resultados y procedimientos, pero el proceso de probar no era considerado un medio para explicar por qué un resultado era cierto.

Por otra parte, Dickerson (2006) analiza las concepciones sobre la prueba y el rigor matemático de profesores de Matemáticas en prácticas. Los resultados de su investigación indican que los futuros profesores enfatizaban las funciones comunicativa y explicativa de la prueba, dando especial relevancia al nivel y preparación de los receptores de la misma. Selden y Selden (2003) aportan información sobre la forma de realizar pruebas de futuros profesores de Matemáticas, llegando a la conclusión de que, aunque parecían conocer la lógica y coherencia matemática que subyace en los argumentos utilizados en un proceso de prueba, no fueron capaces de reconocerlos e identificarlos, lo cual limitaba su capacidad para construirlos. En este mismo sentido, Knuth (2002a) indica que la mayoría de profesores de Matemáticas de secundaria identificaban correctamente los argumentos que constituían pruebas, pero también consideraban válidos algunos argumentos que no lo eran. En este sentido, Raman (2003) indica que los profesores buscan argumentos comprensibles que convenzan de la verdad del argumento, pero que deben ser comunicados de manera rigurosa y formal, empleando el lenguaje matemático adecuado.

Desde otra perspectiva, Weber y Alcock (2004) analizan las formas de probar de profesores y estudiantes universitarios, caracterizando las demostraciones analizadas como semánticas y sintácticas. Para estos autores, la principal característica de las pruebas semánticas es la creación de «instantáneas», consideradas como imágenes o representaciones que el individuo utiliza de manera sistemática y repetida para pensar sobre un objeto matemático, de manera que éste adquiera significado para él. Estas instantáneas se supone que pueden ayudar a generar una demostración formal. Por otra parte, cuando se desarrollan procesos de probar y el individuo utiliza y manipula los conceptos matemáticos sólo de manera lógica, con el fin de asegurarse de que se siguen las reglas del manejo de los símbolos matemáticos, se dice que realiza pruebas sintácticas. Los autores llegan a la conclusión de que los profesores usaron su intuición y buscaron elementos que les permitieran entender el significado de los conceptos, les ayudarán a encontrar la solución del problema y a formalizar los resultados. Los estudiantes, sin embargo, tuvieron dificultades a la hora de construir representaciones de conceptos y de utilizar la intuición para ayudarse en el proceso de probar.

Los resultados de estas investigaciones indican que los significados que los profesores dan, a los procesos de probar, son claves para entender cómo los profesores analizan el papel de los problemas de probar, en el aprendizaje de las Matemáticas. Este hecho ha ocasionado que la introducción paulatina de *software* dinámico, como recurso para la enseñanza de las Matemáticas, haya puesto de manifiesto la necesidad de analizar cómo conciben los profesores la introducción de dicho *software* en el trabajo con pruebas en el aula.

Pruebas y entornos de geometría dinámica

El uso de entornos de geometría dinámica ha generado la aparición de diferentes formas de introducir la prueba (De Villiers, 1998), así como de diferentes características asociadas a la forma en la que los estudiantes se implican en procesos de probar. Los estudiantes se pueden introducir en los procesos de prueba a través de la investigación gráfica y dinámica, analizando el comportamiento de objetos geométricos y de las relaciones existentes entre ellos (Laborde et al., 2006). Este proceso empírico puede ayudar a los estudiantes a comprender conceptos y procedimientos matemáticos y a sentir la necesidad de realizar justificaciones y pruebas formales (Marrades & Gutiérrez, 2000). Los entornos de geometría dinámica pueden poner de manifiesto contradicciones que promuevan la necesidad de justificar el resultado (Hadas et al., 2000), y las herramientas dinámicas proporcionan un contexto, en el que es posible que se produzca una evolución del significado de la demostración, pasando de la intuición geométrica al proceso deductivo (Mariotti, 2000, 2001).

Esta nueva situación, generada por la introducción del *software* dinámico, a planteado la necesidad de caracterizar el papel de las concepciones del profesor en la gestión de estos entornos (Christou et al., 2004; Pandiscio, 2002). Teniendo en cuenta esta situación, nos planteamos como objetivo de esta investigación describir y explicar cómo los profesores conciben

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

la prueba y cómo la introducción del *software* dinámico permite que se generen nuevos significados para los procesos de probar.

Los significados y funciones del proceso de probar

En contextos institucionales se reconoce como un significado común para la prueba el de validar o justificar una afirmación, aportando razones o argumentos (Godino & Martínez, 1997). Pero no es éste el único significado que se atribuye a la prueba matemática. Diversos autores señalan diferentes funciones de la prueba (De Villiers, 1990; Dreyfus & Hadas, 1996; Hanna & Jahnke, 1996; Hadas & Hershkovitz, 1998; Harel & Sowder, 1998; Mariotti, 2006). Algunas de estas funciones son:

- *explicar* por qué un resultado matemático es cierto.
- *comunicar y transmitir* relaciones y propiedades matemáticas.
- *desarrollar el pensamiento lógico y abstracto*.
- establecer un *vínculo entre matemáticas y realidad*.
- *sistematizar,* organizando los resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas y
- *descubrir y construir* conocimiento matemático.

Se considera que una prueba *explica* cuando proporciona información sobre por qué un argumento es cierto (Hanna & Janke, 1996). En este sentido, Hersch (1993) afirma que las matemáticas están interesadas en algo más que en el hecho de si una conjetura es cierta, las matemáticas quieren saber por qué lo es. En este contexto, Mariotti (2006) indica que, aunque es fundamental la dependencia lógica de un argumento con respecto a un conjunto de axiomas y teoremas, es también muy importante comprender el significado de las relaciones existentes entre el argumento y las propiedades y conceptos de los que deriva.

A las demostraciones también se les asigna la función de *comunicar,* subrayando su papel social al entenderla como forma de contacto entre matemáticos, considerándose como elemento inseparable de las matemáticas y componente esencial del hacer, comunicar y dejar constancia de ellas.

Por *sistematizar* se entiende desarrollar procesos que permitan la organización de resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas (De Villiers, 1990). Finalmente, entender la prueba como proceso que ayuda a comprender mejor el conocimiento matemático (Hanna & Jahnke, 1996), supone enfatizar su función como instrumento para *descubrir* y *construir* matemáticas.

A partir de esta caracterización de las funciones de la prueba, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son las concepciones de los profesores sobre la prueba? ¿Cuáles son las funciones que asignan a la prueba?
- ¿Qué funciones de la prueba se enfatizan, según se use o no *software* dinámico, en el desarrollo de procesos de probar y en el diseño de oportunidades para que los estudiantes se impliquen en la prueba?

Diseño de la Investigación

La investigación realizada es del tipo «desing research-based» (Cobb, Confrey, Di Sessa, Lehrer & Schauble, 2003).

Participantes

Los participantes eran alumnos de dos ediciones del módulo de formación virtual (*e-learning*) «Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas» (Torregrosa, Llinares y Penalva, 2004a, 2004b) del máster *Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación*, coordinado por las universidades de Alicante, Carlos III de Madrid y Autónoma de Barcelona, en colaboración con Santillana Formación.

Los participantes procedían de diversos países (Argentina, Chile, Ecuador, España y El Salvador) y tenían experiencia profesional diversa como profesores de Matemáticas de Educación Primaria, Secundaria y Universidad. La investigación se centró en 12 de estos participantes (11 profesores de Matemáticas y un ingeniero informático), debido a la pertinencia de sus respuestas a todas las cuestiones y actividades propuestas

Contexto. Entorno virtual de aprendizaje

El módulo de formación virtual (*e-learning*) «Tecnologías en la Enseñanza de las matemáticas» tiene como objetivos:

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

- Presentar a los profesores herramientas dinámicas e interactivas con el fin de que reflexionen sobre sus posibilidades didácticas y de integración en el aula.
- Utilizar los foros virtuales de debate como espacio de intercambio de experiencias profesionales y reflexiones.

Los contenidos del módulo son:

- Tópico I: Software dinámico. Procesos de prueba.
- Tópico II: Los foros virtuales como espacio de aprendizaje y el proceso de definir.
- Tópico III: Internet, recursos para la enseñanza de las matemáticas y procesos de representación.

Datos de la Investigación

Los datos de esta investigación provienen de las actividades realizadas por los profesores en el Tópico I: *Software* dinámico. Procesos de prueba, en las que debían resolver problemas de probar, junto con sus intervenciones en los foros virtuales de debate. La finalidad del Tópico I era introducir a los profesores en el análisis de actividades de probar realizadas en contextos estáticos y dinámicos. Los profesores realizaron siete actividades (en las Figuras II, III y IV hay ejemplos de algunas de ellas) y participaron en tres foros virtuales.

El contenido del Tópico I está organizado en tres unidades didácticas:

- *UD1. El nuevo* software *y la enseñanza de las matemáticas.* En esta unidad se presentan las características del software dinámico y se introduce el uso de *Cabri Géomètre II* como un ejemplo de *software* dinámico de Geometría.
- *UD2. Diferentes facetas de la noción de prueba.* En esta unidad los profesores debían resolver problemas de probar y participar en los foros de intercambio. La estructura de esta unidad está representada en la Figura I.
- *UD3.* Software *dinámico y los procesos de prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje.* Esta unidad tiene como objetivo facilitar la reflexión del profesor sobre las características de las pruebas en contextos estáticos y dinámicos.

FIGURA I. Estructura de la UD2 «Diferentes facetas de la noción de prueba» perteneciente al Tópico I: «*Software* dinámico. Procesos de prueba», del que proceden parte de los datos de esta investigación.

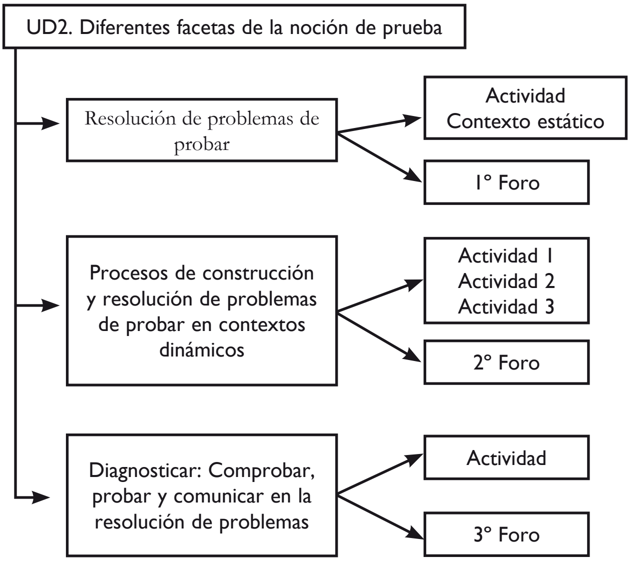


FIGURA II. Actividad «Resolución de problemas de probar». Contexto estático

Actividad «Resolución de problemas de probar»

En la Figura, los puntos G y B dividen a MR en tres partes congruentes, y los puntos G y P también dividen al segmento AC en tres partes congruentes. Sabemos que AG ° BG. Demuestra que los ángulos R y C son iguales.

- Resuelve el problema. Indica el camino que sigues para resolverlo.
- ¿Qué contenidos matemáticos usas en algún momento del proceso de resolución?
- ¿Existe alguna diferencia entre el proceso real de resolución del problema seguido y la forma en la que has comunicado a tus compañeros la resolución seguida?
- Identifica diferentes maneras de resolver el problema:
  - ¿En qué medida los elementos geométricos utilizados en el proceso de probar son diferentes en cada uno de los procedimientos empleados?
  - ¿En qué medida los procesos de comunicar el proceso de resolución (la prueba) han sido diferentes?

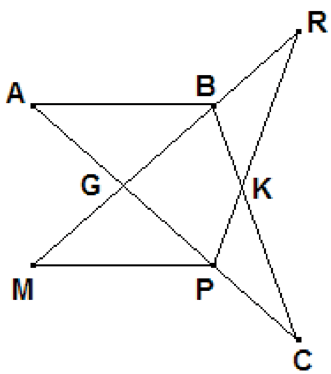
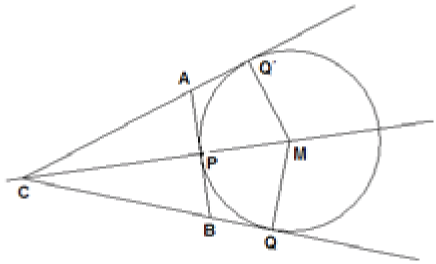


FIGURA III. Actividad 1 del apartado «Procesos de construcción y resolución de procesos de probar en contextos dinámicos» (UD2 del Tópico I)

Actividad 1

Una de las características de la geometría dinámica es la posibilidad de utilizar la modalidad de «arrastrar» para desarrollar las capacidades de conjeturar. Las actividades tipo son «investigar bajo qué condiciones se da algún tipo de relación».

Investigad cuando ABC es un triángulo equilátero:



La actividad está pensada para alumnos de 14 años (2º y 3º de ESO).
La configuración geométrica está construida por:

- Intersección de dos rectas.
- Bisectriz del ángulo (lugar que equidista de los dos lados); por tanto en la bisectriz se encuentra el centro de la circunferencia que es tangente a los dos lados del ángulo.
- Perpendicular a uno de los lados del ángulo (por Q).
- El punto de intersección entre la perpendicular y la bisectriz (M) es el centro de la circunferencia que es tangente al lado del ángulo en Q.
- Punto de intersección de la bisectriz y la circunferencia (P).
- Perpendicular a la bisectriz por P.

Según se ha realizado la construcción podemos usar el modo «arrastrar» de Cabri para dinamizar la construcción en los siguientes casos:

- Se pueden arrastrar las rectas iniciales.
- Se puede arrastrar el punto Q sobre el que se ha construido la perpendicular al lado del ángulo que nos ha permitido determinar el centro de la circunferencia (este centro está determinado por el punto Q y por tanto no se puede mover directamente).

¿Cómo la dinamización de la configuración geométrica puede ayudar a:

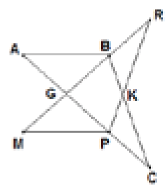
- Probar la igualdad pedida
- Comunicar una prueba realizada
- Ayudar a convencer con mayor facilidad al compañero de lo que se ha realizado
- Conjeturar nuevas relaciones (generar nuevos problemas)

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

FIGURA IV. Actividad 2 del apartado «Procesos de construcción y resolución de procesos de probar en contextos dinámicos» (UD2 del Tópico I)

Actividad 2
«Resolución de problemas de probar» Contexto dinámico.

En la Figura, los puntos G y B dividen a MR en tres partes congruentes, y los puntos G y P también dividen al segmento AC en tres partes congruentes. Sabemos que AG º BG. Demuestra que los ángulos R y C son iguales.



- Dibuja la configuración geométrica de la actividad «Resolución de los problemas de probar» utilizando Cabri-Géomètre. Usa los datos del problema.
- Construye una macro para generar la configuración geométrica del problema.
- ¿Te sugiere esta construcción algún método de resolución distinto al anterior?
- ¿Ha cambiado algo en tu forma de ver y resolver el problema?
- Utiliza las herramientas de Cabri para dinamizar la configuración geométrica construida.
- ¿En qué medida la igualdad del problema se mantiene?
- ¿Cómo la dinamización de la configuración geométrica puede ayudar a :
  - Probar la igualdad pedida
  - Comunicar una prueba realizada
  - Ayudar a convencer con mayor facilidad a un compañero de lo que se ha realizado
  - Conjeturar nuevas relaciones (generar nuevos problemas)

El módulo finaliza con una Evaluación, en la que los profesores tenían que diseñar y justificar una actividad para sus alumnos, con algún tipo de *software* dinámico, con el objetivo de que los estudiantes se implicaran en la realización de demostraciones.

En los «foros virtuales» los profesores podían intercambiar opiniones, experiencias y materiales. La profesora-moderadora abría los foros con cuestiones relacionadas con las tareas propuestas (Figura V). Los objetivos de los foros eran:

- Hacer que los profesores expusieran la forma en que habían resuelto las actividades y reflexionaran sobre lo hecho y sobre los razonamientos utilizados.
- Permitirles que vieran diferentes formas de probar, realizadas por otros profesores, y reflexionaran sobre ellas comparándolas con las propias.

FIGURA V. Cuestiones iniciales en el Primer foro virtual y vinculado a la actividad «Resolución de problemas de probar».

1º Foro: Resolución de problemas de probar. Actividad.
- Comentad la forma en que habéis resuelto la actividad.
- ¿Qué contenidos matemáticos habéis utilizado en el proceso de resolución?
- ¿Hay diferencias entre vuestra manera de resolver la actividad y la forma en que la habéis comunicado en este foro?

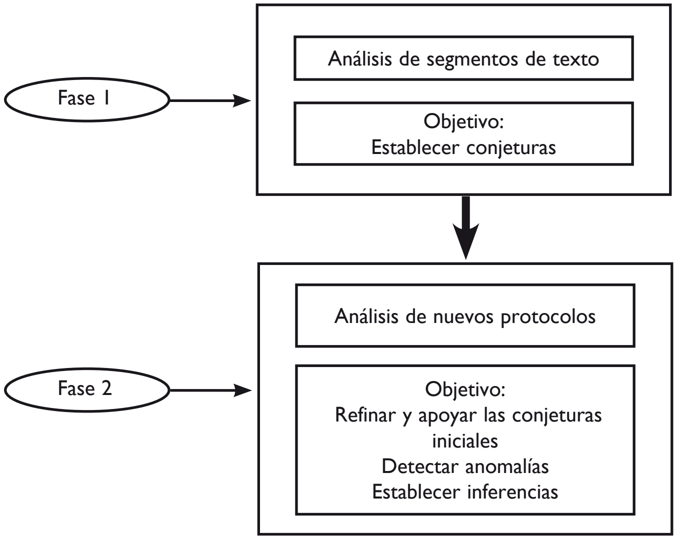
De entre las respuestas de los demás compañeros, comenta los elementos geométricos utilizados por ellos que consideres diferentes a los tuyos, así como las formas distintas de contarlo que hayan utilizado.
Participad todos y replicaos los unos a los otros.

Análisis y organización de resultados

Para inferir las concepciones de los profesores sobre la prueba, se consideraron inicialmente las categorías establecidas por Hanna & Jahnke (1996) y por Knuth (2002a, 2002b): verificación, explicación, comunicación, sistematización y descubrimiento y construcción de contenido matemático. Se realizó un análisis de contenido de las respuestas de los profesores a las actividades propuestas (Llinares, 1991; Pedemonte, 2007). Para analizar la forma en que los profesores realizan sus pruebas se tuvo en cuenta la clasificación en pruebas sintácticas y semánticas de Weber & Alcock (2004). El análisis se desarrolló en dos fases (Figura VI).

La primera fase del análisis consistió en una lectura global de las producciones de los profesores para realizar una inmersión en los datos y construir una referencia global de lo realizado por cada profesor. A partir de esta primera lectura, una segunda lectura permitió generar los primeros comentarios preanalíticos. En este proceso, denominamos «protocolo» al texto producido por un profesor al resolver una actividad, responder alguna cuestión o realizar una intervención en alguno de los foros. Posteriormente, los protocolos se dividieron en fragmentos más pequeños, que incluían ideas completas, que denominamos segmentos de texto. De cada uno de los segmentos de texto se infirieron indicadores de las concepciones de los profesores sobre la prueba matemática (Figura VII). Después de establecer inferencias se pasó a la segunda fase del análisis, buscando segmentos de texto que apoyaran la inferencia realizada.

FIGURA VI. Esquema del análisis realizado



En la segunda fase del análisis se agruparon los protocolos en categorías, distinguiendo entre la prueba considerada como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje.

Tanto en una fase como en otra, se prestó atención a las consideraciones de cada profesor sobre la introducción de *software* dinámico en la realización de procesos de prueba, intentando detectar qué funciones de la prueba eran enfatizadas por los profesores, en los contextos estáticos y dinámicos. El análisis permitió generar un informe para cada uno de los doce profesores que fue considerado como un estudio de caso. Posteriormente a la elaboración de cada uno de los estudios de casos, éstos se agruparon según las características puestas de manifiesto en las concepciones identificadas. La siguiente sección recoge los resultados producidos por este análisis.

Revista de Educación, 352. Mayo-Agosto 2010 pp. 379-404
Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

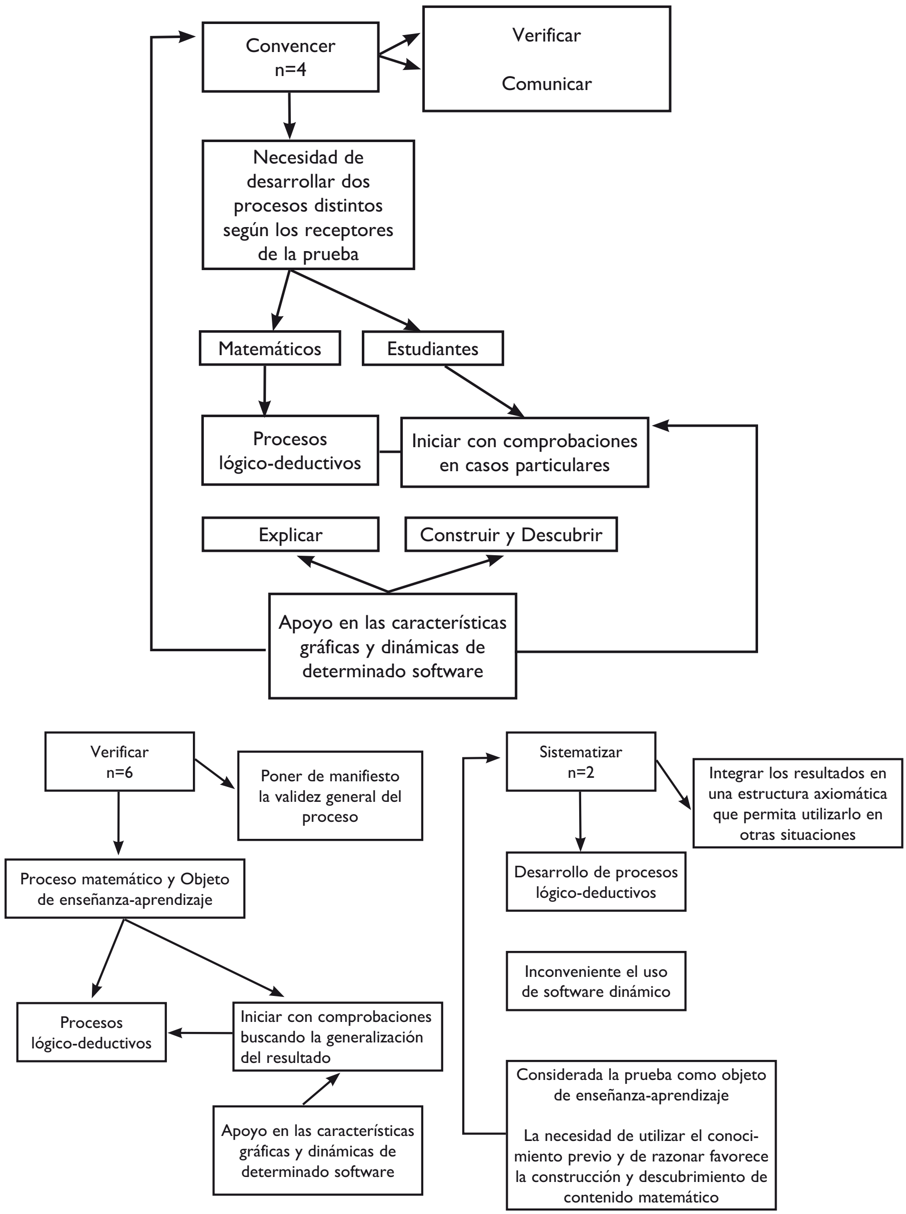
FIGURA VII. Estructura para organizar el análisis de contenido

<table>
<tr><td>Fecha: 05/10/2003</td><td>Nombre del profesor: VV</td><td>Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia: Tópico I, 1º Foro, Actividad «Resolución de problemas de probar»- Diferencias entre realizar una prueba y comunicarla</td></tr>
<tr><td colspan="2">Número y tipo de intervención: 3ª Intervención, Contrarréplica Respuesta de aclaración a la moderadora</td><td>Título de la intervención: «Se ve que no entendí la pregunta»</td></tr>
<tr><th>PROTOCOLO</th><th>SEGMENTOS DE TEXTO</th><th>CONJETURAS
(Comentarios preanalíticos)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Creo que los alumnos que participen en serio en el foro son «forzados» a expresarse, a explicarse y eso es sólo posible hacerlo bien cuando uno ha comprendido las cosas. Es decir, que les ayuda a asimilar los conceptos y a ir interiorizando los métodos matemáticos.
De manera que, efectivamente, explicar el procedimiento seguido exige una seria reflexión sobre todos los pasos dados. Hace muchos años que tengo conciencia de que enseñando se aprende mucho.</td><td>Los alumnos que participan en el foro son forzados a explicarse</td><td>Los foros como herramientas que potencian la comunicación y obligan a explicar las propias ideas.</td></tr>
<tr><td>Y eso es sólo posible hacerlo bien cuando uno ha comprendido las cosas</td><td>Comunicar exige comprender bien el contenido que se ha de transmitir.</td></tr>
<tr><td>Les ayuda a asimilar los conceptos y a ir interiorizando los métodos matemáticos</td><td>Comunicar ayuda al que transmite a asimilar y a apropiarse de los conceptos y procedimientos matemáticos que intenta transmitir.</td></tr>
<tr><td>Explicar el procedimiento seguido exige una seria reflexión sobre todos los pasos dados.</td><td>Comunicar supone explicar y ello exige una reflexión previa importante sobre el proceso que se ha de desarrollar para ello.</td></tr>
</table>

Resultados

Después de analizar los doce casos se realizó una agrupación de los mismos considerando las relaciones encontradas entre sus concepciones y teniendo en cuenta las funciones enfatizadas por los profesores, tanto en situaciones de enseñanza-aprendizaje como al considerar la prueba como proceso matemático. Mediante este procedimiento se obtuvieron tres categorías: *Convencer-comunicar*, *Verificar* y *Sistematizar*. Los resultados obtenidos indican que no podemos considerar estos significados aislados, por ello se establece también la relación existente con el resto de funciones que los profesores asignan a la prueba. La Figura VIII recoge las características y relaciones identificadas, en cada una de las funciones de la prueba consideradas. Estas características de describen a continuación.

FIGURA VIII. Características de las funciones de la prueba enfatizadas por los profesores, en contextos estáticos y dinámicos



Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

Convencer-Comunicar

Esta categoría está formada por aquellos profesores (n=4) que consideran que la función principal de la prueba es la de convencer que un argumento matemático es cierto. Para estos profesores *convencer* implica verificar, puesto que se ha de justificar la validez del argumento a probar, pero colocan el énfasis en la *Comunicación* del proceso considerando que lo más importante es que el interlocutor comprenda el sentido de la prueba y acepte el resultado.

> Independientemente de la manera de resolver el problema, el método de comunicarlo es lo importante, pienso que si no se comunica de tal manera que el problema sea visualizado…, el proceso de aprendizaje se verá evidentemente limitado… (Actividad 1. UD1 «Resolución de problemas de probar». Primera carpeta de entrega. Profesor IJe).

Desde esta perspectiva, para convencer a otros es preciso desarrollar dos tipos de procesos, según los interlocutores sean matemáticos o estudiantes. Los matemáticos sólo admitirán procesos lógico-deductivos en los que el «sentido de la prueba» esté en desarrollar correctamente dichos procesos, identificando y vinculando propiedades matemáticas en los diferentes pasos. Para estos profesores alcanzar el objetivo de *convencer* se fundamenta en la corrección del razonamiento deductivo generado. Por ello, distinguen entre comprobación y prueba, y buscan en el desarrollo de procesos deductivos argumentos irrefutables que pongan de manifiesto de manera inequívoca la validez del argumento que probar o la generalización del resultado. Por ejemplo, uno de los profesores, al considerar los problemas de construcción realizados con el *software* dinámico, indicaba que el razonamiento basado en la visualización y, por tanto, en la descripción de las propiedades geométricas a partir de las construcciones gráficas realizadas, no se puede considerar una verdadera prueba. Este profesor diferenciaba entre argumentos empíricos –apoyados en el manejo de unos cuantos casos particulares– y argumentos lógico-deductivos que permiten generalizar la validez de las proposiciones. Para este profesor, el proceso de prueba se vincula a la necesidad de expresar de una manera simbólica la hipótesis, los pasos dados y la tesis. Es decir, la manera en la que se comunica el razonamiento vinculado a un proceso de probar es tan importante como los argumentos o relaciones que se puedan establecer.

> Sobre si efectuar mediciones sobre una gráfica es una demostración válida, debo mencionar que como demostración teórica no es válida, la demostración gráfica sirve para conceptualizar visualmente una teoría pero esto no la autentifica… es también nece-

> sario la expresión de la hipótesis en forma simbólica, la tesis en forma simbólica, y también constatar proposiciones y razones. (Primer foro. Profesora AnDi).

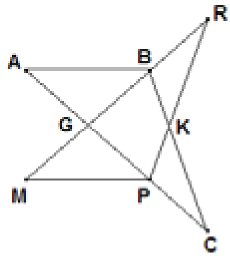
Por otro lado, los profesores que enfatizan la función de convencer consideran que, para convencer a estudiantes, es mejor empezar con comprobaciones en casos particulares –argumentos empíricos–, para lo que supondrá una gran ayuda el uso de herramientas gráficas y dinámicas.

> ... el factor fundamental de usar este tipo de programas (*software* dinámico), es de poder ofrecer a nuestros alumnos, otra manera de resolver los problemas, y no tan sólo centrarnos en hipótesis, sino mediante comprobaciones, si cabe la pena decirlo, físicamente al arrastrar las figuras y poder comprobar los triángulos mediante mediciones… Para nuestros estudiantes muchas veces la demostración dinámica permite convencerlos con una mayor efectividad y llevarlos luego a analizar de forma deductiva las fórmulas e hipótesis, por lo que para ellos, la demostración dinámica constituye un pilar fundamental sobre el cual desarrollar sus conocimientos. (Primer foro. Profesora AnDi) (énfasis añadido).

Cuando los profesores enfatizan la función de «convencer» del proceso de prueba, hacen referencia al carácter explicativo que éste debe tener. Para lograrlo, al demostrar, exponen sus reflexiones, lo que pretenden hacer y los conceptos y propiedades que utilizan. Convencer determina una manera de comunicar las pruebas, dando toda la información necesaria que evidencie la validez del argumento y la pertinencia de la prueba.

> Antes de tratar de resolver el problema, busqué la información necesaria, que me otorgase, según yo los conceptos necesarios para su resolución. Después de su lectura, he tratado de resumir los conceptos o hipótesis necesarias, para determinar que ^R = ^C.

Actividad 1 de la UD1, «Resolución de problemas de probar».
Profesora AnDi.



Semejanza de triángulos:

- Determiné lados homólogos.
- Determiné características de semejanza de triángulos. En este caso Reciprocidad: «Si un triángulo es semejante a otro éste es semejante al primero».
- En base a esto determiné si tienen sus tres lados proporcionales. Si poseen 2 ángulos respectivamente iguales.
- Asocié cada ángulo con su lado opuesto. Estableciendo la proporcionalidad de los lados. Apliqué el teorema fundamental de existencia de triángulos semejantes: «toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primero».
- Que en nuestro caso particular sería la recta imaginaria que se traza entre el punto G y K,
- En el triángulo MPR, la recta GK // a la recta MP.
- En el triángulo ABC, la recta GK // a la recta AB (// = paralelas). Entonces el triángulo MPR es semejante al triangulo ABC.
- Y el triángulo MPR es semejante al triángulo GKR.
- Y en el triángulo ABC este es semejante al triángulo GKC. Si el triángulo MPR es semejante al triángulo ABC entonces

^A = ^M

^P = ^B

^R = ^C que es lo que buscábamos

Se considera también de gran ayuda el uso de herramientas dinámicas que permiten experimentar y comprobar, a la vez que hacen posible la visualización y manipulación de situaciones matemáticas. A través de la representación gráfica de configuraciones geométricas se consigue plasmar conceptos, relaciones y propiedades derivadas de ellos. Estos profesores se apoyan en la capacidad visual de estas herramientas, utilizándolas de manera que la comunicación de los pasos dados sea lo suficientemente entendible como para que se pueda captar todo el sentido de la prueba, consiguiendo así el propósito de «convencer» a través de una determinada forma de comunicar explicando.

La concepción de convencer a alguien, también aparece en la consideración de la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje. Se convence a los estudiantes potenciando los procesos de conjeturar, lo que lleva al descubrimiento de nuevas relaciones. Las características gráficas y manipulativas del *software* dinámico permiten experimentar, conjeturar y comprobar, y ello lo convierte en una potente herramienta que va a permitir al estudiante generar proposiciones, a través de la identificación de casos particulares. Desde esta concepción, el profesor se convierte en guía del aprendizaje, preparando actividades que promuevan la reflexión, el razonamiento y el uso del conocimiento previo, para que el estudiante pueda por sí mismo construir y descubrir.

> … el alumno que experimenta con este applet su aprendizaje se va basando en el descubrimiento… Los jóvenes…prefieren modelos…interactivos…y así crear sus propios conocimientos. (Actividad «*Software* dinámico. Procesos de prueba». Profesora AnDi).

> No me gusta, si es posible, dar reglas generales y después realizar ejercicios para aplicar las reglas generales. Más bien me gusta que los alumnos descubran estas reglas por ensayo-error guiado y que después apliquen esas reglas a casos particulares hasta que esas reglas se puedan generalizar a cualquier caso… Mi primera idea sería proponer un ejercicio motivador cuya resolución no sea evidente. De esta manera dejaría que los alumnos fuesen probando hasta encontrar una solución al problema. (Actividad de evaluación. Profesor Manulo).

Verificar

El segundo grupo está formado por aquellos profesores (n=6) que enfatizan la función de *verificar* un resultado matemático. La idea dada a la verificación es la de que el interlocutor acepte la validez general de una proposición a partir del proceso de demostración seguido. Desde esta concepción de la prueba, las características gráficas e interactivas de determinado *software* dinámico sirven para verificar ya que ayudan a generalizar.

> En este caso, una característica sobresaliente y muy útil, es que es posible efectuar transformaciones manteniendo el área pero no la forma de la figura. Es posible repetir las transformaciones para diferentes triángulos rectángulos. (Actividad «*Software* dinámico. Procesos de prueba». Profesora CriBor).

También en situaciones de aula, estos profesores consideran que puede ser conveniente utilizar *software* dinámico, de modo que el estudiante pueda comprobar la verdad de una proposición, mediante la generalización, antes de iniciar el proceso de la demostración en sí (la verificación).

> En las matemáticas siempre ha faltado el proceso de verificación tangible, que se consigue fácilmente con el programa, además que produce en el alumno el efecto de conjeturar y pensar, lanza teorías… Ahora existe la posibilidad de que puedan ver de una forma sencilla lo que se les plantea… (Tercer foro. Profesor Xavi).

Desde esta perspectiva, el énfasis se pone en la búsqueda de procedimientos que justifiquen un argumento. Lo relevante es la corrección de los pasos dados para ello, y los procedimientos axiomático-deductivos son garantes de que una proposición es cierta, independientemente del significado de la proposición probada.

> Aplicar definiciones, propiedades, postulados, axiomas y teoremas para argumentar afirmaciones que se encadenan en un proceso lógico-deductivo, … para generalizar una afirmación a partir de una proposición dada como hipótesis… formalizar aplicando rigor en el lenguaje. (Tercer foro. Profesor Xavi).

Sistematizar

Para los profesores (n=2) que enfatizaban la función de sistematizar, la finalidad fundamental de realizar pruebas es poder integrar el resultado obtenido en una estructura axiomática, de manera que dicho resultado pueda ser utilizado en posteriores demostraciones o situaciones. Para estos profesores, lo importante es la relación que se puede establecer entre las diferentes proposiciones geométricas para dar una visión sistematizadora del contenido matemático:

> … buscaría la generalización con el objetivo de usarla después en la resolución de otros problemas. (Tercer foro. Profesor OB).

Desde esta perspectiva, el uso de software dinámico no es apropiado, puesto que no permite explicitar el proceso de relación entre diferentes proposiciones, que es la base de la función sistematizadora de la prueba.

> De los varios métodos que pueden existir para resolver este problema… me parece que no es muy apropiado el utilizar el gráfico como referencia exacta para la solución,… Aunque suene radical, *no creo que se debería invertir tiempo en la comprobación…,* sino más bien centrarse en los datos de que disponemos y los teoremas que podemos aplicar para su solución… Lo más apropiado me parece Demostrar lo que se quiere utilizando postulados, teoremas y demás demostraciones de Geometría analítica. (Primer foro. Profesor JC).

Al hablar de sistematizar se enfatiza la diferencia entre comprobación y prueba, y se remarca la importancia de establecer el carácter general del argumento, que va a permitir incorporarlo a un sistema deductivo axiomático y aplicarlo en posteriores situaciones, a través de la capacidad de establecer relaciones entre proposiciones y resultados previos. El énfasis aquí esta colocado en el carácter «relacional» del proceso de prueba, que permite usar diferentes proposiciones para mostrar la validez de otra proposición.

> Las otras (pruebas) de *software* dinámico ayudan a comprobar pero no ayudan a buscar de forma lógica la manera de demostrarlo… no se buscan relaciones o teoremas que en verdad demuestren esas verdades. (Tercer foro. Profesor JC).

Al referirse a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje, ésta aparece como medio de *construir* y *descubrir* contenido matemático al relacionarla con el uso del conocimiento previo y del razonamiento individual, necesarios cuando se ha de reflexionar sobre el contenido y condiciones del problema de probar y sobre sus consecuencias e implicaciones.

> Sobre todo por la movilización necesaria de un conjunto de «conocimientos» que los estudiantes están obligados a poner en juego a la hora de demostrar. (Actividad «Resolución de problemas de probar». Profesor OB).

> … se desarrolla la capacidad de razonamiento y de buscar soluciones utilizando conocimiento previos. (Segundo foro. Profesor JC).

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

Formas de Probar

En lo que concierne a la forma de realizar pruebas, la mayor parte de los profesores estudiados desarrollan, o se muestran favorables al desarrollo de pruebas semánticas buscando herramientas y procedimientos para descubrir y aclarar el significado de los conceptos y propiedades matemáticas con las que trabajan. De esta manera, buscan situaciones matemáticas desde las que se favorezca la creación de «instantáneas» y de imágenes mentales que permitan entender y asimilar mejor el contenido matemático.

En situaciones de enseñanza-aprendizaje, se enfatiza el hecho de que hay que apoyar las definiciones y demostraciones rigurosas construyendo modelos mentales no formales, pero útiles, para que se entiendan los conceptos con los que trabaja (Fischbein, 1982; Thurston, 1994).

Sólo un profesor se mostraba favorable a las pruebas eminentemente sintácticas, consideraba que el desarrollo de una prueba se debe basar solamente en razonamientos lógico-deductivos, que se expresen a través de lenguaje simbólico. Para él, sólo estos razonamientos son válidos para justificar la validez del resultado y para facilitar la comprensión del mismo. Experimentar, conjeturar, comprobar e intentar visualizar o recrear situaciones matemáticas, y las relaciones y propiedades que se derivan de ellas, son inconvenientes porque pueden entorpecer la reflexión y el razonamiento basado en el desarrollo de argumentos puramente formales.

> Creo que nadie discute las ventajas que brinda un *software* dinámico como Cabri para el aprendizaje. Sin embargo, pienso que, por ejemplo, las personas que contamos con el sentido de la vista no desarrollamos otros sentidos como lo hacen los ciegos, de la misma forma, al contar con una herramienta como ésta no se desarrolla la capacidad de razonamiento y de buscar soluciones utilizando conocimientos, sino la habilidad del ratón de arrastrar para comprobar y medir y ver que es verdad. (Segundo foro. Profesor JC).

Discusión y conclusiones

Las tareas diseñadas en esta investigación, junto con el entorno de aprendizaje seleccionado, han permitido a los profesores reflexionar sobre sus concepciones sobre la demostración e identificar la importancia del trabajo con pruebas en el aula. El *software* dinámico ha sido un elemento primordial para la mayoría de ellos al permitirles descubrir características que favorecen y amplían su significado de la prueba. En este sentido, el contraste de los significados dados a la prueba, en contextos estáticos y en contextos dinámicos, ha permitido explicitar con mayor claridad las concepciones de los profesores. Sin embargo, las funciones enfatizadas por los profesores son diferentes.

Para los profesores que enfatizan el carácter de convicción de la prueba, es necesario proceder de diferentes formas según el contexto en el que se trabaje. Si la demostración está hecha por matemáticos, o se pretende con ella que un resultado sea aceptado por la comunidad matemática, el procedimiento utilizado ha de ser lógico-deductivo y descrito utilizando lenguaje simbólico. En situaciones de enseñanza-aprendizaje, reconocen que las pruebas lógico-deductivas son poco convincentes y poco significativas, y que estos aspectos mejoran notablemente si, previamente, se desarrollan procedimientos en los que se introducen representaciones gráficas y se permite la manipulación de conceptos (en el mismo sentido que en la investigación de Martínez Recio & Godino, 2001). La identificación de una concepción dual de la idea de prueba, vinculada al contexto en el que se encuentra, apoya el carácter situado de las concepciones (Noss & Hoyles, 1996). Los profesores que asignan a la prueba como principal función la de verificar, también contemplan la posibilidad de desarrollar dos tipos de procesos. En cualquier contexto se ha de realizar una prueba deductiva, pero se puede considerar el uso de *software* dinámico como elemento que ayude a generalizar el resultado.

Al igual que en el estudio de Dickerson (2006), los profesores para los que la prueba adquiere el significado de convencer y de verificar, reconocen que los procesos lógico-deductivos son de difícil comprensión y que los estudiantes no ven la necesidad de demostrar. Por ello, creen que es necesario adaptar los procesos de prueba a las características y nivel de los receptores, y aluden a otros procedimientos para iniciar el trabajo con pruebas. Entre los procedimientos alternativos, destacan los que utilizan representaciones gráficas y comprobaciones, pero indicando la necesidad de que el estudiante distinga entre comprobar y probar, pasando del trabajo con argumentos empíricos, procedentes de la comprobación de la proposición en casos particulares, a la realización de demostraciones que verifiquen, poniendo de manifiesto el carácter general de los resultados.

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

Mientras que en la investigación de Knuth (2002a) no hay evidencias de que los profesores conciban la prueba como medio de explicar por qué un argumento matemático es cierto, en esta investigación, los profesores que colocan el énfasis en la función de convencer pretenden que sus pruebas expliquen por qué un resultado matemático es válido, y cómo se llega a él. Lo hacen diferenciando las hipótesis de la tesis, procediendo desde las definiciones y explicando el uso que hacen de ellas y poniendo por escrito el enunciado de las propiedades que utilizan.

Influencia del uso de *software* dinámico sobre las concepciones de la prueba

En nuestro estudio, la función explicativa de la prueba aparece como una herramienta para convencer y el *software* dinámico se utiliza para potenciar esta función. Para convencer en el aula, se procede permitiendo a los estudiantes investigar y experimentar y se buscan herramientas que promuevan la elaboración de conjeturas, y que permitan la comprobación de lo acertado o no de las mismas. De esta forma, se considera que los estudiantes pueden construir y descubrir conocimiento por sí mismos. Para lograrlo, el profesor debe conocer a fondo las posibilidades de dicho *software* y preparar las actividades apropiadas para explotar al máximo esas posibilidades. Así, el alumno aprenderá a razonar matemáticamente y será capaz de obtener resultados por sí mismo, encontrando sentido al desarrollo de pruebas. En situaciones de enseñanza-aprendizaje, estos profesores consideran que el *software* dinámico permitirá realizar comprobaciones en casos particulares, que ayudarán a establecer la diferencia entre comprobar y generalizar.

Consideramos de gran importancia la realización de nuevas investigaciones en las que los profesores tengan que reflexionar sobre su conocimiento matemático y sobre su forma de actuación en el aula, explicitando sus creencias a través de sus propias reflexiones y del conocimiento de formas de proceder de otros profesores, aspecto que se puede producir a través del intercambio de experiencias en entornos virtuales de aprendizaje. Obtener información sobre el uso que los profesores hacen de diversas herramientas gráficas y dinámicas, con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, es también para nosotros un punto de estudio de gran importancia y en el que se requieren más investigaciones.

Referencias bibliográficas

Boero, P. (Ed.) (2007). *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice.* Taiwan/Rotterdam: Sense Publishers.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(3), 339-352.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher,* 32(1), 9-13.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

— (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. En R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dickerson, D. S. (2006). Aspects of preservice teachers´ understandings of the purposes of mathematical proof. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz. & A. Méndez (eds.). *Proceedings of the Twenty Eight Annual Meeting of the North American Chapter of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 710-716). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Dreyfus, T. & Hadas, N. (1996). Proof as an answer to the question why. *Z.D.M. International Reviews on Mathematical Education,* 96(1), 1-5.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-24.

Godino, J. D. & Martínez Recio, A. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. En E. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 313-320). Lathi: Universidad de Helsinki.

Hadas, N. & Hershkowitz, R. (1998). Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. En A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 25-31). South Africa: Stellenbosh.

Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2000). The role of contraditions and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometric environments. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1-2), 127-150.

Hanna, G. & Jahnke, N. (1996). Proof and Proving. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel. J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students´ Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.

Knuth, E. (2002a). Secondary School Mathematics Teachers´ Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.

— (2002b). Teachers´ Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Hanbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S. (1991). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En C. Marcelo (Coord.), *La investigación sobre la formación del Profesorado. Métodos de investigación y análisis de datos* (pp. 57-96). Buenos Aires: Cincel.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1/2), 25-53.

— (2001). Justifying and Proving in the Cabri Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6(3), 257-281.

— (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Hanbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Martínez Recio, A. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 83-99.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers.* Dordredcht: Kluwer Academic Publishers.

Pandiscio, E. (2002). Exploring the Link between Preservice Teachers´Conception of Proof and the Use of Dynamic Geometry Software. *School Science and Mathematics*, 102(5), 216-225.

Pedemonte B. (2007) How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66(1), 23-41.*

Putnam, R. & Borko, H. (1997). Teacher learning: Implications of New Views of Cognition. En B. J. et al. (Eds.), *International Handbook of Teachers and Teaching,* (pp. 1223-1296). Dordrech, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Raman, M. (2003). Key ideas: what are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319-325.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.

Stylianides, G. (2007). Investigating the Guidance Offered to Teachers in Curriculum Materials: The Case of Proof in Mathematics. *International Journal of Science & Mathematics Education,* Preprint (January 2007), 1-25.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(3), 145-166.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the AMS,* 30,161-177.

Torregrosa, G., Llinares, S. y Penalva, M. C. (2004a). Diseño de entornos de aprendizaje integrando las TIC: Construcción de conocimiento necesario para enseñar Matemáticas. *Comunicación y Pedagogía*, 190, 29-33.

— (2004b). Características de un Módulo de Aprendizaje Interactivo: un ejemplo. *Comunicación y Pedagogía,* 190, 34-37.

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 1-26.

Dirección de contacto: Germán Torregrosa-Gironés. Universidad de Alicante. Facultad de Educación. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Apartado de correos 99. 03080 Alicante, España. E-mail: German.Torregrosa@ua.es

Fecha de entrada: 18-10-2007 Fecha de aceptación: 24-10-2008