



MARCO PARA PRUEBA DE MATEMÁTICAS

PISA 2021

Esta es una versión inicial del Marco de referencia,
no constituye la versión final de la OCDE



NOTA: Esta versión del documento es una adaptación con cambios menores de terminología y giros del lenguaje en castellano, realizada por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) del Ministerio de Educación y Formación Profesional de España, en base al documento proporcionado por ICFES y con su autorización.





Presidente de la República
Iván Duque Márquez

Ministra de Educación
Nacional
María Victoria Angulo González

Viceministra de Educación
Preescolar, Básica y Media
Constanza Alarcón Párraga

Directora General
María Figueroa Cahnspeyer

Secretaria General
Liliam Amparo Cubillos Vargas

Directora de Evaluación
Natalia González Gómez

Director de Producción y Operaciones
Mateo Ramírez Villaneda

Director de Tecnología
Felipe Guzmán Ramírez

Subdirectora de Producción de Instrumentos
Nubia Rocio Sánchez Martínez

Subdirector de Diseño de Instrumentos
Luis Javier Toro Baquero

Subdirectora de Análisis y Divulgación
Ana María Restrepo Sáenz

Subdirector de Estadística
Jorge Mario Carrasco Ortíz

Oficina Asesora de Comunicaciones
María Paula Vernaza Díaz

Oficina Gestión de Proyectos de Investigación
Luis Eduardo Jaramillo Flechas

Coordinador de la publicación
Rafael Benjumea

Edición del documento
Juan Camilo Gómez

Revisión del documento
Katherine Lorena Guerrero Martínez
Alejandro Corrales Espinoza

Traducción y adaptación
del documento
Rafael Benjumea

Diseño gráfico
Blanca Duarte

Bogotá D.C., noviembre de 2019

ADVERTENCIA Con el fin de evitar la sobrecarga gráfica que supondría utilizar en español “o/a” para denotar uno u otro género, el ICFES opta por emplear el masculino genérico en el que todas las menciones de este se refieren siempre a hombres y mujeres.

ICFES. 2019. Todos los derechos de autor reservados ©

Todo el contenido es propiedad exclusiva y reservada del ICFES y es el resultado de investigaciones y obras protegidas por la legislación nacional e internacional. No se autoriza su reproducción, utilización ni explotación a ningún tercero. Solo se autoriza su uso para fines exclusivamente académicos. Esta información no podrá ser alterada, modificada o enmendada.

Tabla de contenido

| | |
|---|----|
| Introducción | 3 |
| Definición de la alfabetización matemática | 9 |
| Una mirada de los individuos alfabetizados en matemáticas en PISA 2021 | 12 |
| Un vínculo explícito con una variedad de contextos para problemas en PISA 2021 | 18 |
| Un papel visible para las herramientas matemáticas, incluyendo la tecnología en PISA 2021 | 19 |
| Organización del dominio | 20 |
| Razonamiento matemático y procesos de resolución de problema | 21 |
| Conocimiento del contenido matemático | 34 |
| Contextos para las preguntas de evaluación y habilidades seleccionadas del siglo XXI | 44 |
| Evaluación de la alfabetización matemática | 50 |
| Estructura de la prueba de matemáticas PISA 2021 | 50 |
| Distribución deseada de puntos por razonamiento matemático y proceso de resolución de problemas | 50 |
| Distribución deseada por categoría de contenido | 51 |
| Rango de dificultad de las preguntas | 52 |
| Pruebas de matemáticas por ordenador | 56 |
| Diseño de las preguntas de matemáticas PISA 2021 | 60 |
| Calificación de las preguntas | 62 |
| Informes de desempeño en matemáticas | 62 |
| Conocimientos de matemáticas y los cuestionarios de antecedentes | 63 |
| Resumen | 68 |
| Referencias | 69 |

Introducción

La evaluación de matemáticas tiene una importancia particular para PISA 2021, ya que matemáticas será, de nuevo, el dominio principal de evaluación. Aunque las matemáticas fueron evaluadas por PISA en 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015 y 2018, este dominio fue el área de mayor énfasis solo en 2003 y 2012.

El regreso de matemáticas como dominio principal en PISA 2021 permite continuar comparando el desempeño de los estudiantes en el tiempo, y al mismo tiempo reexaminar lo que debería evaluarse a la luz de los cambios que han ocurrido en el mundo, en el área de enseñanza y en las políticas y prácticas educativas.

Cada país tiene una visión de la competencia matemática y organiza su escolarización para conseguirla como resultado. La competencia matemática, históricamente, ha incluido desarrollar habilidades aritméticas básicas u operaciones, incluyendo sumar, restar, multiplicar y dividir números enteros, decimales y fracciones; calcular porcentajes; y calcular el área y volumen de figuras geométricas simples. En tiempos recientes, la digitalización de muchos aspectos de la vida, la ubicuidad de la información para tomar decisiones personales que tengan que ver, primero, con la educación y planeamiento profesional, y, más tarde en la vida, con la salud y las inversiones, así como los grandes retos sociales para enfrentar asuntos como el cambio climático, la deuda pública, el crecimiento de la población, la propagación de enfermedades pandémicas y la globalización de la economía, han reconfigurado lo que significa ser competente en matemáticas y estar bien preparado para participar como un ciudadano atento, comprometido y reflexivo en el siglo XXI.

Los problemas críticos que se nombraron anteriormente, así como otros que enfrentan las sociedades en todo el mundo, tienen un componente cuantitativo. Entenderlos, así como enfrentarlos, exige, aunque sea en parte, estar alfabetizados en matemáticas y pensar matemáticamente. Este pensamiento matemático, en contextos cada vez más complejos, no se basa en la reproducción de los procedimientos de cómputo básicos

MARCO PARA
LA PRUEBA DE
MATEMÁTICAS

PISA 2021

mencionados previamente, sino en el razonamiento¹(tanto deductivo como inductivo). El papel importante del razonamiento necesita un mayor énfasis en nuestra comprensión de lo que esto significa para que los estudiantes estén alfabetizados en matemáticas. Además de la resolución de problemas, este marco sostiene que la alfabetización matemática en el siglo XXI incluye el razonamiento matemático y algunos aspectos del pensamiento computacional.

En la actualidad, los países enfrentan nuevas oportunidades y retos en todas las áreas de la vida, muchos de los cuales provienen de la rápida propagación de los ordenadores y dispositivos como robots, teléfonos inteligentes y máquinas en red. Por ejemplo, la gran mayoría de adultos jóvenes y de estudiantes que empezaron la universidad después de 2015 han creído siempre que los teléfonos son dispositivos móviles y portátiles capaces de comunicar voz, texto e imagen y de conectarse a internet, posibilidades que parecían de ciencia ficción para sus padres y con seguridad para sus abuelos (Beloit College, 2017_[1]). El reconocimiento de la creciente discontinuidad contextual entre el último siglo y el futuro ha provocado una gran discusión sobre el desarrollo de habilidades propias del siglo XXI en los estudiantes (Ananiadou y Claro, 2009_[2]; Fadel, Bialik and Trilling, 2015_[3]; National Research Council, 2012_[4]; Reimers y Chung, 2016^[5]).

Es esta discontinuidad la que también estimula la necesidad de una reforma en la educación y el reto de conseguirla. Periódicamente, los educadores, legisladores y otros grupos interesados revisan los estándares y políticas de la educación pública. A lo largo de estas deliberaciones se dan respuestas nuevas a dos preguntas generales: 1) ¿Qué necesitan aprender los estudiantes? y 2) ¿Qué estudiantes necesitan aprender qué? El argumento más usado en defensa de la educación en matemáticas para todos los estudiantes es su utilidad en varias situaciones prácticas. Sin embargo, este argumento se ha debilitado con el tiempo ya que muchas actividades simples se han automatizado. No hace mucho los camareros de los restaurantes multiplicaban y sumaban en papel para calcular los precios que se debían pagar; hoy solo tienen que oprimir botones en dispositivos portátiles. No hace mucho la gente usaba calendarios impresos para planificar sus viajes. Esto exigía una buena comprensión de los ejes temporales y de sus disparidades, así como interpretar complejas tablas bidireccionales. Hoy pueden simplemente hacer una búsqueda en internet.

1. A lo largo de este marco, las referencias al razonamiento matemático suponen tanto el razonamiento estadístico (inductivo) como el matemático (deductivo).

Sobre la pregunta “¿qué enseñar?”, surgen varias respuestas restrictivas de la manera en que se conciben las matemáticas. Muchas personas ven las matemáticas como poco más que una caja de herramientas útiles. Una muestra clara de esta concepción se puede encontrar en los currículos escolares de muchos países. Estos están muchas veces reducidos a una lista de procedimientos o temas matemáticos, y se les pide a los estudiantes que practiquen con un número limitado de estos en situaciones predecibles y a menudo comprobadas. Esta visión de las matemáticas es demasiado estrecha para el mundo de hoy e ignora características claves de las matemáticas cuya importancia está creciendo. Pese a lo anterior, también hay un creciente número de países que hacen énfasis en el razonamiento y en la importancia de los contextos relevantes en sus currículos. Tal vez estos países pueden servir como modelos útiles para otros.

Al final, la respuesta a estas preguntas es que todo estudiante debería aprender (y se le debería dar la oportunidad de aprender) a pensar matemáticamente, usando el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) junto con un pequeño grupo de conceptos matemáticos fundamentales que ayuden a este razonamiento y que no sean necesariamente enseñados explícitamente sino encontrados y reforzados a través de la experiencia de aprendizaje del estudiante. Esto equipa al estudiante con un marco conceptual con el cual enfrentar las dimensiones cuantitativas de la vida en el siglo XXI.

El marco PISA 2021 está diseñado para hacer más explícita y clara la importancia que tienen las matemáticas para un estudiante de 15 años, al tiempo que nos aseguramos de que las preguntas desarrolladas se inscriben en contextos auténticos y significativos. El ciclo de modelización matemática, usado en marcos anteriores (ej. OCDE (2004_[6]; 2013_[7])) para describir las etapas por las que pasan los individuos al resolver problemas contextualizados, sigue siendo una característica predominante del marco PISA 2021. Este es usado para ayudar a definir los procesos matemáticos en los que se involucran los estudiantes a medida que resuelven problemas. Estos procesos, junto con el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo), darán las dimensiones de los informes principales.

Para PISA 2021, la prueba de matemáticas por ordenador (PMO) será el principal modo de presentación para evaluar la alfabetización matemática. No obstante, se ofrecerán instrumentos de evaluación en papel a los países que elijan no evaluar sus estudiantes por ordenador.

El marco ha sido actualizado para también reflejar el cambio en el modo de presentación que se hizo en 2015, incluyendo una discusión sobre las cuestiones que se deberían tener en cuenta para el desarrollo de las preguntas de la PMO, ya que esta será la primera actualización importante del marco de matemáticas desde que las pruebas por ordenador se introdujeron en PISA.

El desarrollo del marco PISA 2021 tiene en cuenta la expectativa de la OCDE de que haya un aumento de la participación en PISA de países de ingresos medios y bajos. En particular, el marco PISA 2021 reconoce la necesidad de aumentar la oferta de las pruebas PISA en el extremo inferior de la distribución del desempeño estudiantil, teniendo en cuenta el proceso de definición del marco PISA para el Desarrollo (OCDE, 2017 [8]), donde se establece la necesidad de expandir la escala de desempeño en el extremo inferior, la importancia de capturar un espectro más amplio de contextos sociales y económicos, y la anticipación de la incorporación de una evaluación para jóvenes desescolarizados de 14 a 16 años.

El creciente y cambiante papel de los computadores y herramientas informáticas tanto en la vida cotidiana como en los contextos de resolución de problemas de alfabetización matemática, se ve reflejado en el reconocimiento que hace el marco PISA 2021 de que los estudiantes deben tener y ser capaces de demostrar habilidades de pensamiento computacional mientras aplican la matemática como parte de su práctica de resolución de problemas. Las habilidades de pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones, determinar cuáles (si hay alguna) herramientas de cálculo pueden ser empleadas para analizar o solucionar problemas, y definir algoritmos como parte de una solución detallada. Al darle prioridad a la importancia del pensamiento computacional y a su aplicación a las matemáticas, el marco adelanta la reflexión de los países participantes sobre el papel del pensamiento computacional en los currículos y la pedagogía matemática.

El marco de la prueba de matemáticas de PISA 2021 está organizado en tres secciones principales. La primera sección, “Definición de la alfabetización matemática”, explica el sustento teórico de la evaluación de matemáticas de PISA, incluyendo la definición formal del constructo *alfabetización matemática*. La segunda sección, “Organización del dominio”, describe cuatro aspectos: a) razonamiento matemático y los tres *procesos* matemáticos (del ciclo de resolución de problemas y modelización); b) la manera en que el conocimiento del *contenido*

matemático está organizado en el marco PISA 2021, y el conocimiento del contenido que es relevante para la evaluación de estudiantes de 15 años; c) la relación entre la alfabetización matemática y las llamadas *habilidades del siglo XXI*; y d) los *contextos* en los que los estudiantes enfrentarán retos matemáticos. La tercera sección, “Evaluar la alfabetización matemática”, define asuntos estructurales de la evaluación, incluyendo un modelo de prueba y otras informaciones técnicas.

Para asegurar que se mantenga la tendencia, la mayoría de las preguntas en PISA 2021 serán preguntas que han sido usadas en pruebas PISA anteriores. Una gran colección de preguntas liberadas basadas en el marco anterior se puede encontrar en <http://www.oecd.org/pisa/test>. El **Anexo A** ofrece algunos elementos generales de siete unidades de evaluación que buscan mostrar los elementos nuevos más importantes del marco 2021.

El marco 2021 fue escrito bajo la guía del grupo de expertos en matemática (GEM) 2021, un cuerpo creado por el proveedor de PISA para el marco de matemáticas (RTI International), con consultas al Consejo de Gobierno de PISA. Los ocho miembros del grupo de expertos en matemáticas incluían matemáticos, estadísticos, docentes de matemáticas y expertos en evaluación, tecnología e investigación educativa de un amplio rango de países. El grupo de expertos en matemáticas recibió el apoyo de un grupo de expertos en matemáticas extendido (GEMe), conformado por diez expertos que actuaron como pares revisores de la versión del marco creado por el GEM. El grupo GEMe incluyó a expertos con una amplia experiencia en matemáticas de diferentes países. Se realizaron revisiones adicionales por parte de expertos de los más de 80 países que constituyen el Consejo de Gobierno de PISA. RTI International, en el marco del contrato con la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), realizó otras dos labores de investigación: una encuesta de validez de contenido entre educadores, universidades y empleadores; y un laboratorio cognitivo con jóvenes de 15 años en diferentes países para tener realimentación estudiantil sobre las preguntas de muestra que se presentaron en el marco. El trabajo del GEM 2021 se apoyó en versiones previas del Marco de Matemáticas de PISA e incorporó las recomendaciones del Grupo Consultor Estratégico en Matemática, convocado por la OCDE en 2017.

Definición de alfabetización matemática

MARCO PARA
LA PRUEBA DE
MATEMÁTICAS

PISA 2021

Comprender las matemáticas es clave en la preparación de un joven para su participación y contribución a la sociedad moderna. Una creciente proporción de problemas y situaciones que se enfrentan en la vida diaria, incluyendo contextos profesionales, exigen algún nivel de comprensión matemática antes de ser entendidos y enfrentados. Las matemáticas son una herramienta crucial para los jóvenes al enfrentar un amplio espectro de problemas y retos en varios aspectos de sus vidas.

Por lo tanto, es importante hacerse una idea sobre lo adecuada que es la preparación de los jóvenes que terminan el centro educativo para usar las matemáticas de cara a pensar sobre sus vidas, planificar su futuro y razonar y resolver problemas significativos relacionados con asuntos importantes de sus vidas. Una evaluación a los quince años les da a los países una indicación temprana de cómo pueden responder los individuos más adelante en sus vidas a la amplia gama de situaciones que encontrarán relacionadas con las matemáticas, y que necesitarán el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) y la resolución de problemas para darles sentido.

Como base de una evaluación internacional de jóvenes de 15 años, es razonable preguntar: “¿Qué es importante que los ciudadanos sepan y sean capaces de hacer en situaciones que involucren matemáticas?”. Más específicamente, ¿qué significa ser matemáticamente competente para un joven de 15 años que puede estar terminando el centro educativo o preparándose para seguir una formación más especializada para su vida profesional o la admisión en una universidad? Es importante que el constructo de la alfabetización matemática, que se usa en este marco para denotar *la capacidad de los individuos de razonar matemáticamente y resolver problemas en una amplia variedad de contextos del siglo XXI*, no sea percibido como sinónimo de un mínimo o bajo nivel de habilidades y conocimientos. En lugar de esto, se quieren describir las capacidades de los individuos para *razonar matemáticamente y usar herramientas, datos, procedimientos y conceptos matemáticos*

para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta concepción de alfabetización matemática reconoce la importancia de que los estudiantes desarrollen una comprensión sólida de un amplio espectro de procesos y conceptos matemáticos y se den cuenta de los beneficios de estar implicados en exploraciones del mundo real que estén respaldadas por las matemáticas. El constructo de la alfabetización matemática, como ha sido definido por PISA, hace énfasis en la necesidad de desarrollar la capacidad de los estudiantes para usar las matemáticas en contexto, y es importante que tengan experiencias enriquecedoras en sus clases de matemáticas para lograr esto. Esto es igualmente cierto para los estudiantes de 15 años que estén cerca del final de su educación formal en matemáticas, como para aquellos que continuarán el estudio formal de matemáticas y para los jóvenes de 15 años que no estén escolarizados.

La alfabetización matemática trasciende las barreras de la edad. Por ejemplo, el Programa para la Evaluación Internacional de Competencias de los Adultos (PIAAC por su nombre en inglés) de la OCDE define la capacidad numérica como *la capacidad de adquirir, usar, interpretar y comunicar ideas e información matemáticas, con el fin de enfrentar y manejar las demandas matemáticas de un amplio espectro de situaciones de la vida adulta.* Los paralelismos entre esta definición para adultos y la definición de PISA 2021 de la alfabetización matemática para los jóvenes de 15 años son tanto notables como predecibles.

La evaluación de la alfabetización matemática de jóvenes de 15 años debe tener en cuenta características relevantes de estos estudiantes; por lo tanto, hay que identificar contenidos, lenguajes y contextos apropiados para esa edad. Este marco distingue entre las categorías generales de contenido que son importantes para la alfabetización matemática de los individuos en general y los temas específicos de contenido que son apropiados para estudiantes de 15 años. La alfabetización matemática no es un atributo que un individuo tiene o no tiene. En lugar de esto, la alfabetización matemática es un atributo que está en un continuo en el que algunos individuos están más alfabetizados matemáticamente que otros y donde siempre hay potencial para crecer.

Para los fines de PISA 2021, la alfabetización matemática se define de la siguiente manera:

La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una amplia variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a conocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo y hacer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI.

El marco de PISA 2021, si se compara con los marcos PISA 2003 y PISA 2012, al tiempo que aprecia y preserva las ideas básicas de la alfabetización matemática desarrolladas, reconoce un gran número de cambios en el mundo de los estudiantes, que a su vez señalan un cambio en la manera de evaluar la alfabetización matemática, en comparación con el enfoque usado en marcos anteriores. La tendencia es alejarse de la necesidad de realizar cálculos básicos y pasar a un mundo rápidamente cambiante impulsado por nuevas tecnologías y tendencias en las que los ciudadanos son creativos y comprometidos, que hacen juicios para sí y para la sociedad en la que viven.

A medida que la tecnología cumple un papel cada vez más importante en la vida de los estudiantes, la trayectoria de largo plazo de la alfabetización matemática debería también englobar la relación recíproca y sinérgica entre el pensamiento matemático y el pensamiento computacional, presentado por (Wing 2006²) como “la manera en que piensan los científicos del cómputo” y visto como un proceso de pensamiento que supone formular problemas y diseñar sus soluciones de una manera que puedan ser ejecutadas por un ordenador, un humano o una combinación de ambos (Wing 2011³). Las funciones que cumple el pensamiento computacional en las matemáticas incluyen la manera en que los temas matemáticos específicos interactúan con temas computacionales concretos, y cómo el razonamiento matemático complementa el pensamiento computacional (Gadanidis, 2015^[9]; Rambally, 2017^[10]). Por ejemplo, Pratt y Noss (2002^[11]) discuten el uso de un micromundo computacional para desarrollar conocimiento matemático en los casos de probabilidad y aleatoriedad; Gadanidis et al. (2018^[12]) proponen un enfoque para involucrar a los niños pequeños con ideas de teoría de grupos, usando una combinación de herramientas

2. J. Wing, Computational Thinking, Communications of the ACM, Vol. 49, No. 3, March 2006, pp. 33–35.

3. J. Wing, Computational Thinking – What and Why? The Magazine of Carnegie Mellon University’s School of Computer Science, March 2011. The LINK, Research Notebook. <https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why>.

prácticas y de pensamiento computacional. Por lo tanto, mientras la educación matemática evoluciona en términos de las herramientas disponibles y los modos potenciales de apoyar a los estudiantes para explorar las poderosas ideas de la disciplina (Pei, Weintrop y Wilensky, 2018_[13]), el uso cuidadoso de conjuntos de habilidades y herramientas de pensamiento computacional pueden profundizar los contenidos de aprendizaje de las matemáticas creando condiciones efectivas de aprendizaje (Weintrop et al., 2016_[14]). Además, las herramientas de pensamiento computacional les ofrecen a los estudiantes un contexto en el que pueden materializar constructos abstractos (explorando y relacionándose con conceptos matemáticos de un modo dinámico) (Wing 2008⁴), así como expresar ideas de nuevas maneras e interactuar con conceptos a través de nuevos medios y herramientas representacionales (Grover, 2018_[15]; Niemelä et al., 2017_[16]; Pei, Weintrop y Wilensky, 2018_[13]; Resnick et al., 2009_[17]).

Una mirada de los individuos alfabetizados en matemáticas en PISA 2021

El énfasis del lenguaje en la definición de la alfabetización matemática está en la relación activa con las matemáticas para resolver problemas de la vida real en una amplia variedad de contextos, y busca englobar el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) y la resolución de problemas usando herramientas, datos, conceptos y procedimientos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos.

Es importante anotar que la definición de alfabetización matemática no solo se centra en el uso de las matemáticas para resolver problemas de la vida real, sino que también identifica el razonamiento matemático como un aspecto central de estar alfabetizado en matemáticas. La contribución que hace el marco PISA 2021 resalta la centralidad del razonamiento matemático tanto para el ciclo de resolución de problemas como para la alfabetización matemática en general.

La **Figura 1** muestra la relación entre el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) y la resolución de problemas como se presenta en el ciclo de modelización de matemáticas en los marcos PISA 2003 y PISA 2012.

4. J. Wing, Computational thinking and thinking about computing, Philosophical Transactions of The Royal Society A, 366:3717-3725, 2008.



FIGURA 1. Alfabetización matemática: la relación entre razonamiento matemático y el ciclo (modelización) de resolución de problemas.

Para que los estudiantes estén alfabetizados en matemáticas deben ser capaces, ante todo, de usar su conocimiento de los contenidos matemáticos para reconocer la naturaleza matemática de una situación (problema), especialmente aquellas situaciones que se encuentran en la vida real, y luego formularla en términos matemáticos. Esta transformación (de una situación confusa y ambigua de la vida real a un problema matemático bien definido) exige un razonamiento matemático. Una vez se haya hecho la transformación con éxito, el problema matemático resultante necesita resolverse usando los procedimientos, algoritmos y conceptos matemáticos enseñados en el centro educativo. Sin embargo, puede ser necesario tomar decisiones estratégicas sobre la selección de estas herramientas y el orden de su aplicación (esta es también una manifestación de razonamiento matemático). Finalmente, la definición de PISA nos recuerda la necesidad del estudiante de evaluar la solución matemática interpretando los resultados en la situación original de la vida real. Adicionalmente, los estudiantes deberían también tener y ser capaces de demostrar habilidades de pensamiento computacional como parte de su práctica en la resolución de problemas. Estas habilidades de pensamiento computacional, que son aplicadas en la formulación, empleo, evaluación y razonamiento, incluyen el reconocimiento de patrones, descomponer las partes, determinar cuál (si hay alguna)

herramienta computacional puede emplearse en el análisis o resolución del problema, y definir los algoritmos como parte de una solución detallada.

Aunque el razonamiento matemático y la resolución de problemas de la vida real se superponen, hay un aspecto del razonamiento matemático que va más allá de la resolución de problemas prácticos. El razonamiento matemático es también una manera de crear y evaluar argumentos, sopesando interpretaciones e inferencias relacionadas con las afirmaciones (ej. en los debates de política pública, etc.) y las soluciones de problemas que se pueden entender mejor matemáticamente dada su naturaleza cuantitativa.

Por tanto, la alfabetización matemática combina dos aspectos relacionados: *razonamiento matemático* y *resolución de problemas*. La *alfabetización matemática* juega un papel importante en la capacidad de usar las matemáticas para *resolver problemas de la vida real*. Además, el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) también va más allá de la resolución de problemas de la vida real para incluir la creación de juicios informados sobre el importante grupo de problemas sociales que pueden ser abordados desde las matemáticas. También incluye emitir juicios sobre la validez de la información que bombardea a los individuos, al ayudar a considerar sus implicaciones lógicas y cuantitativas. Es aquí donde el razonamiento matemático también contribuye al desarrollo de un selecto conjunto de habilidades para el siglo XXI (discutidas en otra parte del marco).

El círculo externo de la **Figura 2** muestra que la alfabetización matemática se produce en el contexto de un reto o problema que aparece en la vida real.

La **Figura 2** también muestra la relación entre la alfabetización matemática como se muestra en la **Figura 1** y: los dominios de contenidos matemáticos en los que se aplica la alfabetización matemática; los contextos del problema y las habilidades seleccionadas para el siglo XXI que están sustentadas y se desarrollan a través de la alfabetización matemática.



FIGURA 2. PISA 2021: la relación entre el razonamiento matemático, el ciclo (modelización) de resolución de problemas, los contenidos matemáticos, el contexto y las habilidades seleccionadas para el siglo XXI.

Estas categorías de los contenidos matemáticos incluyen: cantidad, incertidumbre y datos, cambio y relaciones, y espacio y forma. Es el conocimiento de estas categorías de contenido matemático en el que los estudiantes deben basarse para razonar, para formular el problema (transformando la situación de la vida real en una situación problema matemática), para resolver el problema matemático una vez formulado, y para interpretar y evaluar la solución determinada.

Como en los marcos anteriores, las cuatro áreas de contexto que PISA continúa usando para definir las situaciones de la vida real son: personal, ocupacional, social y científica. El contexto puede ser de naturaleza personal e involucrar problemas o retos que pueden confrontar a un individuo, a la familia o grupo cercano. El problema puede estar también ubicado en un contexto social (enfocado en la comunidad de alguien, ya sea local, nacional o global), en un contexto ocupacional (centrado en el campo de trabajo), o en un contexto científico (relacionado con la aplicación de matemáticas al mundo natural y tecnológico).

Incluidas por primera vez en este marco PISA 2021 (y presentadas en la **Figura 2**) están las habilidades seleccionadas para el siglo XXI en las que la alfabetización matemática se apoya y desarrolla. Las habilidades para el siglo

XXI se desarrollan con más detalle en la siguiente sección de este marco. Por ahora, se debe resaltar que mientras los contextos (personal, social, ocupacional y científico) influyen en el desarrollo de las preguntas de las pruebas, no se espera que las preguntas sean deliberadamente construidas para incorporar o tratar sobre las habilidades del siglo XXI. En lugar de eso, se espera que al responder al espíritu del marco y en línea con la definición de alfabetización matemática, las habilidades para el siglo XXI que han sido identificadas se incorporen en las preguntas.

El lenguaje de la definición y la representación en la Figura 1 y la Figura 2 retiene e integra la noción de modelización matemática, la cual ha sido históricamente la piedra angular del marco PISA para matemáticas, ej.: (OCDE, 2004_[6]; OCDE, 2013_[7]). El ciclo de modelización (formular, emplear, interpretar y evaluar) es un aspecto central de la concepción de PISA de los estudiantes alfabetizados en matemáticas; sin embargo, a menudo no es necesario implicarse en cada etapa del ciclo de modelización, especialmente en el contexto de una evaluación (Galbraith, Henn y Niss, 2007_[18]). A menudo sucede que algunas partes significativas del ciclo de modelización matemática han sido realizadas por otros, y el usuario final realiza algunos pasos del ciclo de modelización, pero no todos. Por ejemplo, en algunos casos, las representaciones matemáticas, como gráficas o ecuaciones, pueden ser manipuladas directamente para responder alguna pregunta o para llegar a alguna conclusión. En otros casos, los estudiantes pueden usar una simulación en el ordenador para explorar el impacto del cambio variable en un sistema o un ambiente. Por esta razón, muchas preguntas de PISA involucran solo partes del ciclo de modelización. En realidad, quien resuelve un problema también puede algunas veces oscilar entre procesos, volviendo a sopesar presunciones y decisiones previas. Cada uno de los procesos puede representar retos considerables y se puede necesitar varias iteraciones alrededor de todo el ciclo.

En particular, los verbos “formular”, “emplear” e “interpretar” apuntan a los tres procesos en los que los estudiantes se verán implicados como solucionadores activos de problemas. Formular situaciones matemáticamente implica aplicar el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) para identificar oportunidades para aplicar y usar las matemáticas: ver que las matemáticas pueden ser aplicadas para entender o resolver un problema o reto particular que se ha presentado.

Esto incluye ser capaces de tomar una situación como se presenta y transformarla en una forma susceptible de ser tratada matemáticamente, ofreciendo estructuras y representaciones matemáticas, identificando variables y haciendo suposiciones simplificadoras para ayudar a resolver el problema o superar el reto. Emplear las matemáticas implica aplicar el razonamiento matemático al tiempo que se usan herramientas, datos, procedimientos y conceptos matemáticos para derivar una solución matemática. Esto incluye realizar cálculos matemáticos, manipular expresiones algebraicas y ecuaciones u otros modelos matemáticos, analizar la información de una forma matemática a partir de gráficos y diagramas matemáticos, desarrollar descripciones y explicaciones matemáticas y usar herramientas matemáticas para resolver problemas. Interpretar las matemáticas implica reflexionar sobre las soluciones o resultados matemáticos e interpretarlos en el contexto de un problema o reto. Esto implica aplicar el razonamiento matemático para evaluar las soluciones matemáticas en relación con el contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en la situación; y determinar también qué se debe resaltar cuando se explique la solución.

Es incluida por primera vez en el marco PISA 2021 una apreciación de la intersección entre pensamiento matemático y computacional que genera un conjunto similar de perspectivas, procesos de pensamiento y modelos mentales que los aprendices necesitan para tener éxito en un mundo cada vez más tecnológico. Un conjunto de prácticas constitutivas posicionadas bajo la sombrilla de pensamiento computacional (como abstracción, pensamiento algorítmico, automatización, descomposición en partes y generalización) es también central para el razonamiento matemático y para los procesos de resolución de problemas. La naturaleza del pensamiento computacional dentro de las matemáticas está conceptualizada como la posibilidad de definir y elaborar conocimiento matemático que puede ser expresado con la programación, permitiendo a los estudiantes modelar dinámicamente relaciones y conceptos matemáticos. Una taxonomía de las prácticas de pensamiento computacional dirigida específicamente al aprendizaje de matemáticas y ciencias implica prácticas con datos, modelización y prácticas de simulación, prácticas de resolución de problemas computacionales, y prácticas de pensamiento computacional (Weintrop et al., 2016_[14]). La combinación de pensamiento matemático

y computacional no solo se hace esencial para apoyar efectivamente el desarrollo de la comprensión conceptual del dominio matemático en los estudiantes, sino también para desarrollar sus habilidades y conceptos de pensamiento computacional, dándoles a los aprendices una visión más realista de cómo se practican las matemáticas en el mundo profesional y se usan en el mundo real, y, a su vez, los prepara para seguir carreras en campos relacionados (Basu et al., 2016_[19]; Benton et al., 2017_[20]; Pei, Weintrop y Wilensky, 2018_[13]; Beheshti et al., 2017_[21]).

Un vínculo explícito a una variedad de contextos para problemas en PISA 2021

La referencia a “una variedad de contextos de la vida real” en la definición de alfabetización matemática reconoce que el ciudadano del siglo XXI es un consumidor de argumentos cuantitativos y, a veces, estadísticos. Se hace la referencia como una manera de vincular los contextos específicos que se describen y ejemplifican a fondo más adelante en este marco. Los contextos específicos en sí mismos no son tan importantes, pero las cuatro categorías seleccionadas para usar aquí (personal, ocupacional, social y científica) reflejan un amplio rango de situaciones en las que los individuos pueden encontrar oportunidades matemáticas. La definición también reconoce que la alfabetización matemática ayuda a los individuos a reconocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo, a hacer juicios bien fundados y tomar las decisiones que requieren los ciudadanos reflexivos, comprometidos y constructivos que se enfrentan a mensajes y argumentos del tipo: “un estudio encontró que en promedio...”, “una encuesta muestra una gran caída en...”, “algunos científicos aseguran que el crecimiento de la población superará la producción de alimentos en x años...”, etc.

MARCO PARA
LA PRUEBA DE
MATEMÁTICAS
PISA 2021

Un papel visible para las herramientas matemáticas, incluyendo la tecnología en PISA 2021

La definición de alfabetización matemática incluye explícitamente el uso de herramientas matemáticas. Estas herramientas incluyen una amplia variedad de equipos físicos y digitales, programas y dispositivos de cálculo.

Las herramientas matemáticas basadas en el uso del ordenador son comunes en los ambientes de trabajo del siglo XXI, y se harán cada vez más prevalentes tanto en el trabajo como en la sociedad en general a medida que el siglo avance. La naturaleza de los problemas cotidianos y relacionados con el trabajo y las demandas que hay sobre los individuos para ser capaces de emplear el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) en situaciones en las que las herramientas computacionales están presentes han crecido con estas nuevas oportunidades, creando aún más expectativas para la alfabetización matemática.

Desde el ciclo 2015, la evaluación por ordenador ha sido el principal modo de hacer pruebas, aunque un instrumento equivalente en papel está disponible para aquellos países que decidieron no evaluar a sus estudiantes en ordenador. Las evaluaciones de alfabetización matemática de 2015 y 2018 no explotaron todas las oportunidades que ofrecen los computadores.

La Prueba de Matemáticas por Ordenador (PMO) será el formato de la alfabetización matemática a partir de 2021. Aunque la opción de una evaluación en papel se mantendrá para los países que quieran continuar así, la PMO aprovechará las oportunidades de la Evaluación por Ordenador. Las oportunidades que trae esta transición se discutirán en detalle más adelante en este marco.

Organización del dominio

El marco de matemáticas de PISA define el dominio de matemáticas para la medición PISA y describe un enfoque de la evaluación de la alfabetización matemática para jóvenes de 15 años. Esto es, PISA evalúa la medida en que los estudiantes de 15 años pueden razonar matemáticamente y manejar las matemáticas adecuadamente cuando enfrentan problemas y situaciones, que se presentan la mayoría de las veces en contextos de la vida real.

Para propósitos de la evaluación, la definición de PISA 2021 de alfabetización matemática puede ser analizada en términos de tres aspectos interrelacionados (véase Figura 2):

- El razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) y la resolución de problemas (que incluye los procesos matemáticos que describen lo que los individuos hacen para conectar el contexto del problema con las matemáticas, y así resolver el problema);
- El contenido matemático específico para uso en las preguntas de la evaluación; y
- Los contextos en los que las preguntas de evaluación se ubican junto con las habilidades seleccionadas para el siglo XXI⁵ que sustentan y son desarrolladas por la alfabetización matemática.

Las siguientes secciones desarrollan estos aspectos para respaldar la comprensión y ofrecer guías a los constructores de pruebas. Al resaltar estos aspectos del dominio, el marco de matemáticas de PISA 2021 ayuda a asegurar que las preguntas de evaluación elaboradas para la medición reflejen un amplio rango de razonamientos matemáticos y resolución de problemas, contenidos, contextos y habilidades para el siglo XXI, para que, considerado como un todo, el conjunto de preguntas de evaluación ponga en práctica lo que este marco define como alfabetización matemática. Varias preguntas, basadas en la definición de PISA 2021 de alfabetización matemática, justifican la organización de esta sección del marco. Son:

MARCO PARA LA PRUEBA DE MATEMÁTICAS PISA 2021

5. Las habilidades seleccionadas fueron recomendadas por el Grupo Consultivo de Temas de la OCDE (SAG por su nombre en inglés) (PISA 2021 Mathematics: A Broadened Perspective [EDU/PISA/GB (2017)]) al encontrar la unión entre habilidades genéricas para el siglo XXI y habilidades relativas a la materia que son una parte natural de la instrucción relativa a la materia. El grupo consultivo identificó ocho habilidades para el siglo XXI para ser incluidas en el currículo de matemáticas y, así mismo, en el marco de evaluación PISA 2021. Estas habilidades están enumeradas en el párrafo 124.

- ¿De qué se ocupan los individuos cuando razonan matemáticamente y resuelven problemas matemáticos contextualizados?
- ¿Qué conocimiento de contenidos matemáticos se puede esperar de los individuos, en particular de los estudiantes de 15 años?
- ¿En qué contextos puede la alfabetización matemática ser observada y evaluada y cómo interactúa esto con las habilidades identificadas para el siglo XXI?

Razonamiento matemático y procesos de resolución de problemas

Razonamiento matemático

El razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) involucra sopesar situaciones, elegir estrategias, sacar conclusiones lógicas, desarrollar y describir soluciones, y reconocer cómo esas soluciones pueden ser aplicadas. Los estudiantes razonan matemáticamente cuando:

- Identifican, reconocen, organizan, conectan y representan,
- construyen, abstraen, evalúan, deducen, justifican, explican y defienden, e
- interpretan, hacen juicios, critican, refutan y cualifican.

La capacidad de razonar lógicamente y de presentar argumentos de forma honesta y convincente es una habilidad que se está haciendo cada vez más importante en el mundo de hoy. La matemática es una ciencia sobre nociones y objetos definidos que pueden ser analizados y transformados de diferentes modos usando “razonamiento matemático” para llegar a conclusiones de las que estamos seguros. A través de las matemáticas los estudiantes aprenden que usando el razonamiento apropiado pueden llegar a resultados y conclusiones en los que pueden confiar por ser ciertas. Además, esas conclusiones son lógicas y objetivas, y por tanto imparciales, sin necesidad de ser validadas por una autoridad externa. Este tipo de razonamiento, que es útil más allá de las matemáticas, puede ser aprendido y practicado de modo más efectivo en las matemáticas.

Dos aspectos del razonamiento matemático son especialmente importantes en el mundo de hoy y al definir las preguntas de PISA. Una es la deducción a partir de supuestos claros (razonamiento deductivo), la cual es una característica del proceso matemático. La utilidad de esta habilidad ya se ha enfatizado.

La segunda dimensión importante es el razonamiento estadístico y probabilístico (inductivo). En el nivel lógico, ha habido una confusión frecuente últimamente en las mentes de muchos individuos entre lo posible y lo probable, lo que lleva a que muchos caigan presa de teorías conspirativas o noticias falsas. Desde una perspectiva técnica, el mundo de hoy es cada vez más complejo y sus múltiples dimensiones se ven representadas en terabytes de datos. Entender esta información es uno de los mayores retos que la humanidad enfrentará en el futuro. Nuestros estudiantes deberían estar familiarizados con la naturaleza de estos datos y tomar decisiones informadas en el contexto de variaciones e incertidumbres.

El razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo), posibilitado por algunos conocimientos fundamentales afianzados por las matemáticas escolares, es el centro de la alfabetización matemática. Entre estos conocimientos fundamentales se encuentran:

- Entender cantidades, sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas;
- apreciar el poder de la abstracción y la representación simbólica;
- identificar las estructuras matemáticas y sus regularidades;
- reconocer las relaciones funcionales entre cantidades;
- usar la modelización matemática como un lente hacia la vida real (ej. las situaciones que provienen de ciencias físicas, biológicas, sociales, económicas y comportamentales); y
- entender la variación como el corazón de la estadística.

Las siguientes descripciones de cada uno ofrecen una mirada general de estos conocimientos y como respaldan el razonamiento. Si bien las descripciones pueden parecer abstractas, la idea es que no sean tratadas de una manera abstracta en las pruebas PISA. El mensaje que estas descripciones deberían dar es cómo estas ideas aparecen a lo largo de las matemáticas escolares y cómo, al reforzar su presencia en la enseñanza, ayudamos a los estudiantes a darse cuenta de cómo pueden ser aplicadas en contextos nuevos y diferentes.

Entender cantidades, sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas

La noción básica de cantidad es el aspecto matemático más común y esencial presente y funcional en el mundo (OCDE, 2017, p. 18_[22]).

En el nivel más básico tiene que ver con la capacidad de comparar cardinalidades de conjuntos de objetos. La capacidad de contar usualmente involucra pequeños conjuntos: en la mayoría de los idiomas solo tienen nombre los subconjuntos más pequeños de números. Cuando evaluamos conjuntos más grandes, hacemos operaciones más complejas estimando, redondeando y aplicando órdenes de magnitud. Contar está estrechamente relacionado con otra operación fundamental: clasificar cosas, en la que emerge el aspecto ordinal de los números. La cuantificación de los atributos de los objetos (medición), las relaciones, las situaciones y las entidades en el mundo son una de las maneras más básicas de conceptualizar el mundo circundante (OCDE, 2017_[22]).

Entender cantidades, sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas incluye el concepto básico de número, sistemas de números anidados (ej. números naturales a enteros a racionales a reales), la aritmética de los números y las propiedades algebraicas que tienen los sistemas. En particular, es útil entender cómo los sistemas numéricos progresivamente más complicados permiten la solución de ecuaciones progresivamente más complicadas. Esto sienta los fundamentos que permiten a los estudiantes ver más evidencia de las matemáticas en el mundo real a medida que aprenden más matemáticas.

Para usar la cuantificación eficientemente, uno tiene que ser capaz de aplicar no solo los números sino los sistemas numéricos. Los números en sí mismos tienen una importancia limitada; lo que los hace una herramienta poderosa son las operaciones que podemos hacer con ellos. Así, un adecuado conocimiento de las operaciones de los números es el fundamento del razonamiento matemático.

También es importante entender el tema de la representación (como símbolos que implican numerales, como puntos en una recta numérica, como cantidades geométricas, y con símbolos especiales como π) y cómo moverse entre ellos; los modos en que estas representaciones se ven afectadas por los sistemas numéricos; los modos en que las propiedades algebraicas de estos sistemas son relevantes e importan para operar dentro de los sistemas; y la importancia de las identidades aditivas y multiplicativas, la asociatividad, la conmutatividad, y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Los principios algebraicos sustentan el lugar de los sistemas de valor, permitiendo expresiones económicas de los números y enfoques eficientes de las operaciones con

ellos. También son centrales para las operaciones con números basadas en rectas numéricas, incluyendo el trabajo con inversos aditivos que son centrales a la adición y sustracción de primero enteros, luego racionales y finalmente reales.

Es innegable la centralidad de los números como concepto clave para todas las otras áreas de las matemáticas que se consideran aquí y para el propio razonamiento matemático. La comprensión de los estudiantes de las propiedades y principios algebraicos experimentados a través del trabajo con números es fundamental para su comprensión de los conceptos del álgebra de secundaria, junto con su capacidad de hacerse hábiles en la manipulación de las expresiones algebraicas necesarias para resolver ecuaciones, configurar modelos, representar funciones gráficas, programar y hacer fórmulas en hojas de cálculo. En el mundo de hoy, lleno de información, es cada vez más importante la capacidad de interpretación de patrones numéricos, la comparación de patrones y otras habilidades numéricas.

Un amplio conocimiento de la cantidad y los sistemas numéricos ayuda al razonamiento en aplicaciones en la vida real de las matemáticas previstas en este marco.

Apreciar el poder de la abstracción y la representación simbólica

Las ideas fundamentales de las matemáticas han surgido de la experiencia humana en el mundo y de la necesidad de darle coherencia, orden y hacer previsible esa experiencia. Muchos objetos matemáticos modelan la realidad, o por lo menos reflejan aspectos de la realidad de alguna manera. Sin embargo, la esencia de la abstracción en matemáticas es que es un sistema autocontenido, y los objetos matemáticos derivan su significado de ese sistema. La abstracción implica prestar atención deliberada y selectiva a las similitudes estructurales entre objetos matemáticos, y construir relaciones entre esos objetos basadas en esas similitudes. En las matemáticas escolares, la abstracción forma relaciones entre objetos concretos, representaciones simbólicas y operaciones, incluyendo algoritmos y modelos mentales. Esta capacidad también cumple un papel al trabajar con dispositivos computacionales. La capacidad de crear, manipular y dar sentido al trabajar con abstracciones en contextos tecnológicos es una habilidad importante del pensamiento computacional.

Por ejemplo, los niños empiezan a desarrollar el concepto de “círculo” experimentando objetos específicos que los llevan a un conocimiento informal de que los círculos son “redondeados”. Puede que dibujen círculos para representar estos objetos, dándose cuenta de las similitudes entre los dibujos para generalizar sobre la “redondez”, aunque los círculos sean de diferentes tamaños. “Círculo” se convierte en un objeto matemático abstracto cuando los estudiantes empiezan a “usar” los círculos como objetos en su trabajo y más formalmente cuando es definido como el lugar de puntos equidistantes de un punto fijo en un plano bidimensional.

Los estudiantes usan representaciones, ya estén basadas en textos, sean simbólicas, gráficas, numéricas, geométricas o en código de programación, para organizar y comunicar su pensamiento matemático. Las representaciones nos permiten presentar ideas matemáticas de un modo sucinto que, a su vez, nos lleva a algoritmos eficientes. Las representaciones son también un elemento central de la modelización matemática, que le permite a los estudiantes abstraer una formulación simplificada o idealizada de un problema de la vida real. Tales estructuras son también importantes para interpretar y definir el comportamiento de los dispositivos computacionales.

Tener una apreciación de la abstracción y de la representación simbólica ayuda al razonamiento en la aplicación a la vida real de las matemáticas previstas en este marco, al permitirle a los estudiantes pasar de los detalles específicos de una situación a características más generales y a describirlas de una manera eficiente.

Identificar las estructuras matemáticas y sus regularidades

Cuando los estudiantes de primaria ven: $5 + (3 + 8)$, algunos ven una serie de símbolos que indican un cómputo que debe ser realizado en cierto orden de acuerdo con las reglas del orden de las operaciones; otros ven un número adicionado a la suma de otros dos números. Los últimos están viendo estructuras; y debido a eso no hace falta decirles el orden de la operación, porque si quieres añadir un número a la suma, primero hay que calcular la suma.

Identificar las estructuras sigue siendo importante a medida que avanzan en sus cursos. Un estudiante que entiende que $f(x) = 5 + (x - 3)^2$ quiere

decir que $f(x)$ es la suma de 5 y un cuadrado que es cero cuando $x = 3$, entiende que el mínimo de f es 5.

Esto da el fundamento del pensamiento funcional que se discutirá en la siguiente sección.

La estructura está íntimamente relacionada con la representación simbólica. El uso de símbolos es algo poderoso, pero solo si tienen sentido para quien los usa, en lugar de volverse objetos sin significado que deben ser reacomodados en la página. Identificar la estructura es una manera de encontrar y recordar el significado de una representación abstracta. Tales estructuras son también importantes para interpretar y definir el comportamiento de dispositivos computacionales. Ser capaces de identificar estructuras es una ayuda conceptual importante para el conocimiento procedimental.

Los ejemplos que se han dado muestran que identificar las estructuras de objetos matemáticos abstractos es un modo de reemplazar las reglas del análisis sintáctico, que pueden ser realizadas por un ordenador, con imágenes conceptuales de aquellos objetos que aclaran sus propiedades. Un objeto que se conserva en la memoria de esta manera puede ser objeto de razonamiento en un nivel más alto que el de la manipulación simbólica.

Un sentido fuerte de estructura matemática también puede ayudar a la modelización. Cuando los objetos bajo estudio no son objetos matemáticos abstractos, sino objetos de la vida real que serán modelados por las matemáticas, entonces la estructura matemática puede guiar esta modelización. Los estudiantes también pueden imponer estructuras sobre objetos no matemáticos para hacerlos susceptibles de análisis matemático. Una figura irregular puede ser estudiada con figuras más simples cuyas áreas conocemos. Un patrón geométrico puede ser comprendido haciendo hipótesis sobre las transformaciones y simetría de traslación, rotación o reflexión y extendiendo abstractamente el patrón a todo el espacio. El análisis estadístico se trata a menudo de imponer una estructura a un grupo de datos, por ejemplo, al asumir que vienen de una distribución normal o al suponer que una variable es una función lineal de otra, pero medida con un error normalmente distribuido.

Ser capaz de identificar las estructuras matemáticas ayuda al razonamiento en aplicaciones a la vida real de las matemáticas previstas en este marco,

al permitir a los estudiantes aplicar el conocimiento sobre situaciones o problemas en un contexto a problemas en otro contexto que comparten una estructura similar.

Reconocer las relaciones funcionales entre cantidades

Los estudiantes de primaria se enfrentan a problemas en los que deben encontrar cantidades específicas. Por ejemplo, ¿con qué rapidez se debe conducir de Tucson hasta Phoenix, una distancia de 180 km, en una hora y cuarenta minutos? Problemas como este tienen una respuesta específica: para conducir 180 km en una hora y cuarenta minutos hay que conducir a 108 km por hora.

En un punto los estudiantes empiezan a considerar situaciones en las que las cantidades son variables, esto es, en las que pueden abordar un amplio rango de valores. Por ejemplo, ¿cuál es la relación entre la distancia conducida, d , en kilómetros, y el tiempo empleado en conducir, t , en horas, si conduces a una velocidad constante de 108 km por hora? Estas preguntas implican relaciones funcionales. En este caso la relación, expresada por la ecuación $d = 108t$, es una relación proporcional, el ejemplo fundamental y tal vez el más importante para el conocimiento general.

Las relaciones entre cantidades pueden ser expresadas con ecuaciones, gráficas, tablas o descripciones verbales. Un paso importante para aprender es extraer de estas la noción de función, como un objeto abstracto del cual estas son representaciones. Los elementos esenciales del concepto son un dominio del cual se seleccionan entradas, un codominio, en el que están las salidas, y un proceso para producir salidas a partir de las entradas.

Reconocer las relaciones funcionales entre las variables en aplicaciones a la vida real de las matemáticas previstas en este marco, ayuda al razonamiento al permitir a los estudiantes enfocarse en cómo la interdependencia e interacción entre las variables impactan en la situación.

Usar la modelización matemática como un lente hacia la vida real

Los modelos representan una conceptualización de los fenómenos. Los modelos son simplificaciones de la realidad que resaltan algunas características de los fenómenos mientras se aproximan o ignoran otras.

Así, “todos los modelos están equivocados, pero algunos son útiles” (Box y Draper, 1987, p. 424_[23]). La utilidad de un modelo viene de su poder para explicar o predecir (Weintrop et al., 2016_[14]). Los modelos son, en este sentido, abstracciones de la realidad. Un modelo puede presentar una conceptualización que se entiende como una aproximación o hipótesis de trabajo sobre el fenómeno objeto o puede ser una simplificación intencional. Los modelos matemáticos están formulados en lenguaje matemático y usan una amplia variedad de herramientas matemáticas y resultados (ej. de la aritmética, el álgebra, la geometría, etc.). Así, son usados como formas de definir con precisión la conceptualización de una teoría o un fenómeno, para analizar y evaluar datos (¿el modelo se ajusta a los datos?), y para hacer predicciones. Los modelos pueden ser operativos, es decir, diseñados para funcionar con entradas variables, entre ellas el tiempo, para producir una simulación. Cuando esto se hace, es posible hacer predicciones, estudiar consecuencias y evaluar la adecuación y precisión de los modelos. A lo largo del proceso de modelización debe tomarse nota de los parámetros del mundo real que impactan en el modelo y de las soluciones desarrolladas usando el modelo.

Los modelos basados en ordenador (o computacionales) ofrecen la posibilidad de probar hipótesis, crear datos, introducir aleatoriedades, y así. La alfabetización matemática incluye la capacidad de entender, evaluar y extraer sentido de los modelos computacionales.

Usar modelos en general y modelos matemáticos en particular ayuda al razonamiento sobre aplicaciones a la vida real de las matemáticas previstas en este marco, al animar a los estudiantes a enfocarse en los elementos más significativos de las situaciones y al hacerlo así, reducir el problema a su esencia.

Entender la variación como el corazón de la estadística

En estadística, la variación es uno de los elementos definitivos, sino el principal, sobre los cuales se basa esta disciplina. En el mundo de hoy las personas a menudo tienen que lidiar con este tipo de situaciones por ignorar la variación y como resultado se sugieren generalizaciones exageradas que desorientan y están equivocadas, y que resultan muy peligrosas. Los sesgos en las ciencias sociales son usualmente creados

por no tener en cuenta las fuentes y las magnitudes de la variación en la particularidad que se trata.

La estadística trata esencialmente sobre tener en cuenta o modelizar las variaciones medidas por la variable o, en el caso de múltiples variables, por la matriz de covarianzas. Esto ofrece un ambiente probabilístico en el cual se pueden entender varios fenómenos, así como tomar decisiones críticas. La estadística es de muchas maneras la búsqueda de patrones en un contexto altamente variable: tratar de encontrar la definición única de “verdad” en medio de una gran cantidad de ruido aleatorio. “La verdad” que se puede decir en frases no es de la misma naturaleza que la verdad que pueden dar las matemáticas, la cual es un cálculo de la verdad expresada en contextos probabilísticos, acompañado de un cálculo del error contenido en el proceso. Al final, quien toma la decisión queda con el dilema de nunca saber con certeza cuál es la verdad. El cálculo que se ha desarrollado es, en el mejor de los casos, un rango de posibles valores. Cuanto mejor es el proceso, por ejemplo, cuanto más grande sea el número de datos, más estrecho será el rango de los posibles valores, aunque no se puede evitar ser parte de un rango. Algunos aspectos de esto han estado presentes en anteriores ciclos de PISA, y su creciente importancia ha hecho que se haga más énfasis sobre el tema en este marco.

Entender la variación como una característica central de la estadística, ayuda al razonamiento en la aplicación en la vida real de las matemáticas previstas en este marco, ya que se incita a los estudiantes a trabajar argumentos basados en datos, con consciencia de las limitaciones de las conclusiones que llegan a extraer.

Resolución de problemas

La definición de alfabetización matemática se refiere a la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar (y evaluar) las matemáticas. Estas tres palabras, formular, emplear e interpretar, proporcionan una estructura útil y significativa para organizar los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para conectar el contexto de un problema con las matemáticas y resolver el problema. Las preguntas en la prueba de matemáticas PISA 2021 se asignarán a razonamiento matemático o a uno de los tres procesos matemáticos:

- Formulación de situaciones matemáticamente;
- aplicación de conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento; e
- interpretación, aplicación y evaluación de los resultados matemáticos.

Es importante que tanto los encargados de formular políticas como aquellos que participan más estrechamente en la educación diaria de los estudiantes sepan cuán efectivamente los estudiantes pueden participar en cada una de estas preguntas del modelo/ciclo de resolución de problemas. La *formulación* indica qué tan efectivamente los estudiantes pueden reconocer e identificar oportunidades para usar las matemáticas en situaciones problemáticas y luego proporcionar la estructura matemática necesaria para formular ese problema contextualizado en una forma matemática. El *Empleo* se refiere a qué tan bien los estudiantes pueden realizar cálculos, manejar y aplicar los conceptos y hechos que saben para llegar a una solución matemática de un problema formulado matemáticamente. La *interpretación* (y evaluación) se refiere a la eficacia con la que los estudiantes pueden reflexionar sobre soluciones o conclusiones matemáticas, interpretarlas en el contexto del problema en el mundo real y determinar si los resultados o conclusiones son razonables o útiles. La facilidad de los estudiantes para aplicar las matemáticas a los problemas y situaciones dependen de las competencias inherentes a estas tres etapas, y la comprensión de la efectividad de los estudiantes en cada categoría puede ayudar a informar tanto las discusiones a nivel de políticas, como las decisiones que se toman más enfocadas a nivel del aula.

Además, alentar a los estudiantes a experimentar los procesos de resolución de problemas matemáticos a través de herramientas y prácticas de pensamiento computacional, los estimula a practicar habilidades de predicción, reflexión y depuración (Brennan y Resnick, 2012_[24]).

Formulación de situaciones matemáticamente

La palabra *formular* en la definición de alfabetización matemática se refiere a las personas que son capaces de reconocer e identificar oportunidades para usar las matemáticas y luego proporcionan la estructura matemática a un problema presentado en alguna forma contextualizada.

En el proceso de formulación matemática de situaciones, los individuos determinan dónde pueden extraer las matemáticas esenciales para analizar, configurar y resolver el problema. Traducen de un entorno del mundo real al dominio de las matemáticas y proporcionan al problema del mundo real estructura, representaciones y especificidad matemática. Razonan y dan sentido a las limitaciones y suposiciones del problema. Específicamente, este proceso de formulación matemática de situaciones incluye actividades como las siguientes:

- Seleccionar un modelo apropiado de una lista⁶;
- identificar los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto del mundo real y reconocer las variables significativas;
- reconocer la estructura matemática (incluidas las regularidades, relaciones y patrones) en problemas o situaciones;
- simplificar una situación o problema para que sea susceptible de análisis matemático (p.ej., mediante descomposición);
- identificar restricciones y suposiciones detrás de cualquier modelación matemática, así como simplificaciones extraídas del contexto;
- representar una situación matemáticamente, usando variables apropiadas, símbolos, diagramas y modelos estándar;
- representar un problema de una manera diferente, incluida su organización de acuerdo con conceptos matemáticos y hacer suposiciones apropiadas;
- comprender y explicar las relaciones entre el lenguaje específico del contexto de un problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para representarlo matemáticamente.
- traducir un problema al lenguaje matemático o una representación;
- reconocer aspectos de un problema que se corresponden con problemas conocidos o conceptos matemáticos, hechos o procedimientos;
- elegir entre un conjunto de herramientas informáticas y emplear la más efectiva para representar una relación matemática inherente a un problema contextualizado; y
- crear una serie ordenada de instrucciones (paso a paso) para resolver problemas.

Emplear conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamientos

La palabra *emplear* en la definición de alfabetización matemática se refiere a que las personas pueden aplicar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento para resolver problemas matemáticamente formulados, para obtener conclusiones matemáticas. En el proceso de emplear los conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento para resolver problemas, las personas realizan los procedimientos matemáticos necesarios para obtener resultados y encontrar una solución matemática (p.ej., realizar cálculos aritméticos, resolver ecuaciones, hacer deducciones lógicas de supuestos matemáticos, realizar manipulaciones simbólicas, extraer información matemática de tablas y gráficos, representar y manejar formas en el espacio, y analizar datos). Trabajan en un modelo de la situación problema, establecen regularidades, identifican conexiones entre entidades matemáticas y crean argumentos matemáticos. Específicamente, este proceso de emplear conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento incluye actividades tales como:

- Realizar un cálculo simple⁷; **
- sacar una conclusión simple; **
- seleccionar una estrategia apropiada de una lista; **
- idear e implementar estrategias para encontrar soluciones matemáticas;
- utilizar herramientas matemáticas, incluida la tecnología, para ayudar a encontrar soluciones exactas o aproximadas;
- aplicar hechos matemáticos, reglas, algoritmos y estructuras al encontrar soluciones;
- manejar números, datos, información gráfica y estadística, expresiones y ecuaciones algebraicas, así como representaciones geométricas;
- hacer diagramas, gráficos, simulaciones, construcciones y extraer información matemática de ellos;
- usar y cambiar entre diferentes representaciones en el proceso de encontrar soluciones;
- hacer generalizaciones y conjeturas basadas en los resultados de aplicar procedimientos matemáticos para encontrar soluciones;
- reflexionar sobre argumentos matemáticos, explicar y justificar resultados matemáticos; y

- evaluar el significado de los patrones y las regularidades observados (o propuestos) en los datos.

Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos

La palabra *interpretar* (y *evaluar*) según la definición de alfabetización matemática se centra en la capacidad de los individuos para reflexionar sobre soluciones matemáticas, resultados o conclusiones e interpretarlos en el contexto del problema de la vida real que inició el proceso. Esto implica traducir soluciones matemáticas o razonamientos nuevamente en el contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en el contexto del problema. *Interpretar, aplicar y evaluar* resultados matemáticos abarca los elementos “interpretar” y “evaluar” del ciclo de modelado matemático. Se puede requerir que las personas involucradas en este proceso construyan y comuniquen explicaciones y argumentos en el contexto del problema, reflexionando tanto sobre el proceso de modelado como sobre sus resultados. Específicamente, este proceso de interpretación, aplicación y evaluación de resultados matemáticos incluye actividades tales como:

- Interpretar información presentada en forma gráfica o diagramas; **
- evaluar un resultado matemático en términos del contexto; **
- interpretar un resultado matemático en el contexto del mundo real;
- evaluar la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real;
- comprender cómo el mundo real impacta los resultados y los cálculos de un procedimiento o modelo matemático, para hacer juicios contextuales sobre cómo deben ajustarse o aplicarse los resultados;
- explicar por qué un resultado matemático o conclusión tiene o no sentido dado el contexto de un problema;
- comprender el alcance y los límites de los conceptos y soluciones matemáticas;
- criticar e identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema; y
- usar el pensamiento matemático y el pensamiento computacional para hacer predicciones, proporcionar evidencia para argumentos, probar y comparar las soluciones propuestas.

Conocimiento del contenido matemático

La comprensión del contenido matemático, y la capacidad de aplicar ese conocimiento para resolver problemas significativos contextualizados, es importante para los ciudadanos del mundo moderno. Es decir, para razonar matemáticamente, resolver problemas e interpretar situaciones en contextos personales, ocupacionales, sociales o científicos, es necesario recurrir a cierto conocimiento y comprensión matemáticos.

Dado que el objetivo de PISA es evaluar la alfabetización matemática, se propone una estructura organizativa para el conocimiento del contenido matemático que se basa en fenómenos matemáticos que subyacen a amplias clases de problemas. Tal organización para el contenido no es nueva, como lo ejemplifican dos publicaciones bien conocidas: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990_[25]) y *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994_[26]).

Las siguientes categorías de contenido (utilizadas anteriormente en 2012) se emplean nuevamente en PISA 2021 para reflejar los fenómenos matemáticos que subyacen a las amplias clases de problemas, la estructura general de las matemáticas y los principales aspectos de los programas escolares típicos. Estas cuatro categorías caracterizan el rango de contenido matemático que es central para la disciplina e ilustran las amplias áreas de contenido utilizadas en las preguntas de prueba para PISA 2021 (que incluirá preguntas de PISA D para aumentar las oportunidades de las posiciones más bajas del espectro de rendimiento):

- Cambio y relaciones
- Espacio y forma
- Cantidad
- Incertidumbre y datos

Con estas cuatro categorías, el dominio matemático se puede organizar de una manera que garantice una distribución de preguntas en todo el dominio y se centre en fenómenos matemáticos importantes, al tiempo que evita una clasificación demasiado granular que impida el análisis de los ricos y desafiantes problemas matemáticos basados en situaciones reales.

Si bien la categorización de contenido es importante para el desarrollo de preguntas, la selección y la presentación de los resultados de la evaluación,

es fundamental tener en cuenta que algunas preguntas podrían clasificarse potencialmente en más de una categoría de contenido.

Los currículos de matemáticas de escuelas nacionales generalmente se organizan entorno a líneas de contenido (más comúnmente: números, álgebra, funciones, geometría y manejo de datos) y listas detalladas de temas que ayudan a definir expectativas claras. Estos currículos están diseñados para equipar a los estudiantes con el conocimiento y las competencias que abordan estos mismos fenómenos matemáticos subyacentes que organizan el contenido de PISA. El resultado es que el rango de contenido que surge de organizarlo de la manera en que lo hace PISA está estrechamente alineado con el contenido que típicamente se encuentra en los currículos nacionales de matemáticas. Este marco enumera una variedad de temas de contenido apropiados para evaluar la alfabetización matemática de los estudiantes de 15 años, con base en el análisis de estándares nacionales de once países.

Las amplias categorías de contenido matemático y los temas de contenido más específicos apropiados para los estudiantes de 15 años descritos en esta sección reflejan el nivel y la amplitud del contenido que es elegible para su inclusión en la evaluación PISA 2021. Se proporcionan descripciones de cada categoría de contenido y la relevancia de cada una para razonar y resolver problemas significativos, seguidas de definiciones más específicas de los tipos de contenido que son apropiados para su inclusión en una evaluación de alfabetización matemática de estudiantes de 15 años y jóvenes fuera del centro escolar.

Se han identificado cuatro temas para un énfasis especial en la evaluación PISA 2021. Estos temas no son nuevos en las categorías de contenido matemático. En cambio, estos son temas dentro de las categorías de contenido existentes que merecen un énfasis especial. En el trabajo de Mahajan et al. (“PISA Mathematics 2021”, (2016_[27])) los cuatro temas se presentan no solo como situaciones comúnmente encontradas en la vida adulta en general, sino también como los tipos de matemática necesarios en las nuevas áreas emergentes de la economía, como la fabricación de alta tecnología, etc. Los cuatro son: fenómenos de crecimiento; aproximaciones geométricas; simulaciones por ordenador; y toma de decisiones condicional. Estos temas deben abordarse en las preguntas de la prueba de manera coherente con la experiencia de los jóvenes de 15 años.

Cada tema se discute con el análisis de la categoría de contenido correspondiente de la siguiente manera:

- Fenómenos de crecimiento (cambio y relaciones)
- Aproximación geométrica (espacio y forma)
- Simulaciones por ordenador (cantidad)
- Toma de decisiones condicional (incertidumbre y datos)

Cambio y relaciones

Los mundos naturales y diseñados muestran una multitud de relaciones temporales y permanentes entre objetos y circunstancias, donde los cambios ocurren dentro de los sistemas de objetos interrelacionados o en circunstancias donde los elementos se influyen entre sí. En muchos casos, estos cambios ocurren con el tiempo, y en otros casos los cambios en un objeto o cantidad están relacionados con cambios en otro. Algunas de estas situaciones implican un cambio discreto; otros cambian continuamente. Algunas relaciones son de naturaleza permanente o invariable. Estar más alfabetizado sobre el cambio y las relaciones implica comprender los tipos fundamentales de cambio y reconocer cuándo ocurren para usar modelos matemáticos adecuados a fin de describir y predecir el cambio. Matemáticamente, esto significa modelar el cambio y las relaciones con funciones y ecuaciones apropiadas, así como crear, interpretar y traducir entre representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones.

El cambio y las relaciones son evidentes en entornos tan diversos como el crecimiento de organismos, la música, el cambio estacional y los ciclos, los patrones climáticos, los niveles de empleo y las condiciones económicas. Los aspectos del contenido matemático tradicional de funciones y álgebra, incluidas las expresiones algebraicas, ecuaciones y desigualdades, representaciones tabulares y gráficas, son fundamentales para describir, modelar e interpretar fenómenos de cambio. Las herramientas computacionales proporcionan un medio para visualizar e interactuar con el cambio y las relaciones. Reconocer cómo y cuándo un dispositivo computacional puede aumentar y complementar conceptos matemáticos es una habilidad importante de pensamiento computacional.

Las representaciones de datos y relaciones descritas usando estadísticas también se utilizan para representar e interpretar cambios y relaciones,

y una base firme en los conceptos básicos de números y unidades también es esencial para definir e interpretar cambios y relaciones. Algunas relaciones interesantes surgen de la medición geométrica, como la forma en que los cambios en el perímetro de una familia de figuras pueden relacionarse con los cambios en el área, o las relaciones entre las longitudes de los lados de los triángulos.

Fenómenos de crecimiento: la comprensión de los peligros de las pandemias de gripe y los brotes bacterianos, así como la amenaza del cambio climático, exigen que las personas piensen no solo en términos de relaciones lineales, sino que reconozcan que tales fenómenos necesitan modelos no lineales (a menudo exponencial, pero también otros). Las relaciones lineales son comunes y fáciles de reconocer y comprender, pero asumir la linealidad puede ser peligrosa. Un buen ejemplo de linealidad que probablemente es muy usado por todos es estimar la distancia recorrida en varias cantidades de tiempo mientras se viaja a una velocidad dada. Dicha aplicación proporciona una estimación razonable siempre que la velocidad permanezca relativamente constante. Pero con las epidemias de gripe, por ejemplo, un enfoque tan lineal subestimaría enormemente el número de personas enfermas en los 5 días posteriores al brote inicial. Aquí es donde es fundamental una comprensión básica del crecimiento no lineal (que incluye el crecimiento cuadrático y exponencial) y la rapidez con que las infecciones pueden propagarse dado que la tasa de cambio aumenta día a día. La propagación de la infección por Zika es un ejemplo importante de crecimiento exponencial; reconocerlo así, ayudó al personal médico a comprender la amenaza inherente y la necesidad de una acción rápida.

Identificar los fenómenos de crecimiento como un punto focal de la categoría de contenido de cambio y relaciones no es señal de que exista la expectativa de que los estudiantes participantes hayan estudiado la función exponencial y, ciertamente, las preguntas no requerirán conocimiento de la función exponencial. Por el contrario, la expectativa es que habrá preguntas en los que se espera que los estudiantes (a) reconozcan que no todo el crecimiento es lineal, (b) que el crecimiento no lineal tiene implicaciones particulares y profundas sobre cómo entendemos ciertas situaciones, y (c) aprecien el significado intuitivo de “crecimiento exponencial” como una tasa de crecimiento extremadamente rápida, por ejemplo en la escala de terremotos, cada aumento de 1 unidad en la escala de Richter no significa un aumento proporcional en su

efecto, sino más bien en 10, 100 o 1.000 veces, etc.

Espacio y forma

El espacio y la forma abarcan una amplia gama de fenómenos que se encuentran en todas partes en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de objetos, posiciones y orientaciones, representaciones de objetos, decodificación y codificación de información visual, navegación e interacción dinámica con formas reales, así como con representaciones, movimiento, desplazamiento y la capacidad de anticipar acciones en el espacio. La geometría sirve como una base esencial para el espacio y la forma, pero la categoría se extiende más allá de la geometría tradicional en contenido, significado y método, basándose en elementos de otras áreas matemáticas como la visualización espacial, la medición y el álgebra. Por ejemplo, las formas pueden cambiar y un punto puede moverse a lo largo de un lugar geométrico, lo que requiere conceptos de función. Las fórmulas de medición son centrales en esta área. El reconocimiento, el manejo y la interpretación de formas en entornos que requieren herramientas que van desde software de geometría dinámica hasta Sistemas de Posicionamiento Global (GPS) y software de aprendizaje automático se incluyen en esta categoría de contenido.

PISA supone que la comprensión de un conjunto de conceptos y competencias centrales es importante para la alfabetización matemática en relación con el espacio y la forma. La alfabetización matemática en el área del espacio y la forma involucra una variedad de actividades tales como comprender la perspectiva (p. ej., en pinturas), crear y leer mapas, transformar formas con y sin tecnología, interpretar vistas de escenas tridimensionales desde varias perspectivas y construir representaciones de formas.

Aproximaciones geométricas: el mundo de hoy está lleno de formas que no siguen los patrones típicos de uniformidad o simetría. Debido a que las fórmulas simples no abordan la irregularidad, se ha vuelto más difícil entender lo que vemos y encontrar el área o el volumen de las estructuras resultantes. Por ejemplo, encontrar la cantidad necesaria de alfombras en un edificio en el que los apartamentos tienen ángulos agudos junto con curvas estrechas exige un enfoque diferente al que sería el caso de una habitación típicamente rectangular.

La identificación de aproximaciones geométricas como un punto focal de la categoría de contenido de espacio y forma indica la necesidad de que los estudiantes puedan usar su comprensión del espacio tradicional y los fenómenos de forma en una variedad de situaciones típicas.

Cantidad

La noción de cantidad puede ser el aspecto matemático más dominante, esencial de entender y de poner en práctica en nuestro mundo. Incorpora la cuantificación de atributos de objetos, relaciones, situaciones y entidades en el mundo, entendiendo varias representaciones de esas cuantificaciones, juzgando interpretaciones y argumentos basados en la cantidad. Entender la cuantificación del mundo implica comprender medidas, recuentos, magnitudes, unidades, indicadores, tamaño relativo, tendencias y patrones numéricos. Los aspectos del razonamiento cuantitativo, como el sentido numérico, las representaciones múltiples de los números, la elegancia en el cálculo, el cálculo mental, la estimación y la evaluación de la razonabilidad de los resultados son la esencia de la alfabetización matemática en relación con la cantidad.

La cuantificación es un método primario para describir y medir un amplio conjunto de atributos de aspectos del mundo. Permite modelar situaciones, examinar el cambio y las relaciones, describir y manejar el espacio y la forma, organizar e interpretar datos, medir y evaluar la incertidumbre. Por lo tanto, la alfabetización matemática en el área de la cantidad aplica el conocimiento del número y las operaciones numéricas en una amplia variedad de entornos.

Simulaciones por ordenador: tanto en matemática como en estadística, hay problemas que no son fáciles de abordar porque las matemáticas requeridas son complejas o involucran una gran cantidad de factores que operan en el mismo sistema o por cuestiones éticas relacionadas con el impacto en los seres vivos o su entorno. Cada vez más en el mundo de hoy, estos problemas se abordan mediante simulaciones por ordenador impulsadas por algoritmos. En el ejemplo ilustrativo de *Simulación de Ahorro*, el estudiante usa una simulación por ordenador como herramienta en la toma de decisiones. La simulación por ordenador hace los cálculos para el alumno, dejándolo planificar, predecir y resolver problemas en función de las variables que pueden controlar.

Identificar las simulaciones por ordenador como un punto focal de la categoría de contenido cantidad, indica que, en el contexto de la Prueba por Ordenador de PISA utilizado para 2021, existe una amplia categoría de problemas complejos que incluyen presupuestos y planificación que los estudiantes pueden analizar en términos de las variables del problema, utilizando simulaciones por ordenador proporcionadas como parte de las preguntas de la prueba.

Incertidumbre y datos

En ciencia, tecnología y vida cotidiana, la variación y su incertidumbre asociada es un hecho. Es un fenómeno en el corazón de la teoría de la probabilidad y la estadística. La categoría de incertidumbre y datos abarca reconocer el lugar de variación en el mundo real, incluyendo tener un sentido de la cuantificación de esa variación y reconocer su incertidumbre y error en las inferencias relacionadas. También incluye formular, interpretar y evaluar conclusiones extraídas en situaciones donde existe la incertidumbre. La presentación e interpretación de los datos son conceptos clave en esta categoría (Moore, 1997^[28]).

Las predicciones económicas, los resultados de las votaciones y los pronósticos del tiempo incluyen medidas de variación e incertidumbre.

Existen variaciones en los procesos de fabricación, las puntuaciones de las pruebas, los resultados de las encuestas, y el azar es fundamental para muchas actividades recreativas que disfrutan los individuos. Las áreas curriculares tradicionales de probabilidad y estadística proporcionan medios formales para describir, modelar e interpretar una cierta clase de fenómenos en los que la variación juega un papel central y para hacer las inferencias estocásticas correspondientes. Además, el conocimiento del número y de los aspectos del álgebra, como los gráficos y la representación simbólica, contribuyen a resolver problemas en esta categoría de contenido.

Toma de decisiones condicional: las estadísticas proporcionan una medida de la variación característica de gran parte de lo que las personas encuentran en su vida diaria. Esa medida es la varianza. Cuando hay más de una variable, hay una variación en cada una de las variables, así como una covariación que caracteriza las relaciones entre las variables. Estas interrelaciones a menudo se pueden representar en tablas de dos vías que proporcionan la base para tomar decisiones condicionadas

(inferencias). En una tabla de dos vías para dos variables dicotómicas (es decir, dos variables con dos posibilidades cada una), hay cuatro combinaciones. La tabla de dos vías (análisis de la situación) proporciona tres tipos de porcentajes que, a su vez, proporcionan estimaciones de las probabilidades correspondientes. Estas incluyen las probabilidades de los cuatro eventos conjuntos, los dos marginales y las probabilidades condicionales que juegan el papel central en lo que hemos denominado toma de decisiones condicional. La expectativa para las preguntas de la prueba PISA es que los estudiantes podrán leer los datos relevantes de tablas de datos con una comprensión profunda del significado de los datos que están extrayendo.

En el ejemplo ilustrativo de *Decisión de Compra*, se le presenta al estudiante un resumen de las calificaciones de los clientes para un producto en una tienda en línea. Además, recibe un análisis más detallado de las revisiones por parte de los clientes que proporcionaron calificaciones de 1 o 2 puntos. Este establece una tabla de dos vías y se le pide al estudiante que demuestre que comprende las diferentes estimaciones de probabilidad que proporciona la tabla de dos vías.

La identificación de la toma de decisiones condicional como un punto focal de la incertidumbre y la categoría de contenido de datos, indica que se debe esperar que los estudiantes entiendan cómo la formulación del análisis de un modelo impacta las conclusiones que pueden surgir, y que las diferentes suposiciones/relaciones también podrían generar diferentes conclusiones.

Temas de contenido para guiar la evaluación de la alfabetización matemática de estudiantes de 15 años

Para comprender y resolver eficazmente los problemas contextualizados que implican cambios y relaciones; espacio y forma; cantidad; incertidumbre y datos es necesario recurrir a una variedad de conceptos matemáticos, procedimientos, hechos y herramientas en un nivel apropiado de profundidad y sofisticación. Como una evaluación de la alfabetización matemática, PISA se esfuerza por evaluar los niveles y la matemática que son apropiados para estudiantes de 15 años en una trayectoria para convertirse en ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos del siglo XXI, capaces de hacer juicios bien fundados y tomar

decisiones. Además, PISA, si bien no está diseñado o destinado a ser una evaluación basada en el currículo, se esfuerza por reflejar las matemáticas que los estudiantes probablemente hayan tenido la oportunidad de aprender a los 15 años.

En el desarrollo del marco de alfabetización matemática PISA 2012, con miras a desarrollar una evaluación que sea progresista pero que refleje las matemáticas que los estudiantes de 15 años probablemente tuvieron la oportunidad de aprender, se realizaron análisis de una muestra de los resultados de aprendizaje deseados de once países para determinar qué se enseña a los estudiantes en las aulas de todo el mundo y qué países consideran una preparación realista e importante para los estudiantes a medida que se acercan a inicio del mundo laboral o al acceso a una institución de educación superior. En base a los puntos en común identificados en estos análisis, en conjunto con el juicio de expertos en matemáticas, el contenido considerado apropiado para su inclusión en la evaluación de la alfabetización matemática de estudiantes de 15 años en PISA 2012, y continuado para PISA 2021, se describe a continuación.

Para PISA 2021, se agregaron cuatro temas centrales a la lista. Las listas resultantes son ilustrativas de los temas de contenido incluidos en PISA 2021 y no una lista exhaustiva:

- **Fenómenos de crecimiento:** diferentes tipos de crecimiento lineal y no lineal
- **Aproximación geométrica:** aproximar los atributos y propiedades tanto de formas como objetos irregulares o desconocidos, mediante su división en formas y objetos más familiares para los que existen fórmulas y herramientas.
- **Simulaciones por ordenador:** explorar situaciones (que pueden incluir hacer presupuestos, planificación, distribución de la población, propagación de enfermedades, probabilidad experimental, modelado del tiempo de reacción, etc.) en términos de las variables y el impacto que éstas tienen en el resultado.
- **Toma de decisiones condicional:** uso de principios básicos de combinatoria y comprensión de las interrelaciones entre variables para interpretar situaciones y hacer predicciones.
- **Funciones:** El concepto de función, enfatizando, pero no limitado a, funciones lineales, sus propiedades y una variedad de descripciones

y representaciones de ellas. Las representaciones de uso común son: verbales, simbólicas, tabulares y gráficas.

- **Expresiones algebraicas:** interpretación verbal y manejo de expresiones algebraicas, que incluyen números, símbolos, operaciones aritméticas, potencias y raíces simples.
- **Ecuaciones y desigualdades:** ecuaciones y desigualdades lineales y afines, ecuaciones simples de segundo grado y métodos de solución analíticos y no analíticos.
- **Sistemas de coordenadas:** representación y descripción de datos, posición y relaciones.
- **Relaciones con y entre objetos geométricos en dos y tres dimensiones:** relaciones estáticas tales como conexiones algebraicas entre elementos de figuras (p.ej., el teorema de Pitágoras como definición de la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo), posición relativa, similitud y congruencia, y relaciones dinámicas que implican transformación y movimiento de objetos, así como correspondencias entre objetos de dos y tres dimensiones.
- **Medición:** cuantificación de características de y entre formas y objetos, como medidas de ángulos, distancia, longitud, perímetro, circunferencia, área y volumen.
- **Números y unidades:** conceptos, representaciones de números y sus sistemas (incluida la conversión entre sistemas de números), propiedades de números enteros y racionales, así como cantidades y unidades que se refieren a fenómenos tales como tiempo, dinero, peso, temperatura, distancia, área y volumen, cantidades derivadas y su descripción numérica.
- **Operaciones aritméticas:** la naturaleza y las propiedades de estas operaciones y las convenciones de notación relacionadas.
- **Porcentajes, razones y proporciones:** descripción numérica de la magnitud relativa y la aplicación de proporciones y razonamiento proporcional para resolver problemas.
- **Principios de conteo:** combinaciones simples.
- **Estimación:** aproximación basada en el propósito de cantidades y expresiones numéricas, incluidos cifras significativas y redondeo.
- **Recopilación, representación e interpretación de datos:** naturaleza, génesis y recopilación de varios tipos de datos, y las diferentes formas de analizarlos, representarlos e interpretarlos.
- **Variabilidad de los datos y su descripción:** conceptos como la variabilidad, la distribución y la tendencia central de los conjuntos

de datos, y las formas de describirlos e interpretarlos en términos cuantitativos y gráficos.

- **Muestras y muestreo:** conceptos de muestras y muestreo de poblaciones de datos, también inferencias simples basadas en las propiedades de las muestras, incluida la precisión y la certeza.
- **Azar y probabilidad:** noción de eventos aleatorios, variación aleatoria y su representación, probabilidad y frecuencia de eventos, aspectos básicos del concepto de probabilidad, y probabilidad condicional.

Contextos para las preguntas de evaluación y habilidades seleccionadas del siglo XXI

La definición de alfabetización matemática introduce dos consideraciones importantes para las preguntas de evaluación PISA. Primero, la definición deja en claro que la alfabetización matemática tiene lugar en contextos del *mundo real*. En segundo lugar, *la alfabetización matemática ayuda a las personas a conocer el papel que juegan las matemáticas en el mundo y a emitir los juicios y decisiones bien fundados que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos del siglo XXI*. En esta sección discutimos cómo los contextos del mundo real y las habilidades del siglo XXI impactan en el desarrollo de las preguntas.

La naturaleza del *contexto del mundo real* de la alfabetización matemática no es nada problemática para PISA. Los contextos del mundo real involucran información, y esta se comunica mediante textos. La información cuantitativa y estadística que fluye en el mundo y llega a los ciudadanos, se comunica a través de texto impreso o hablado, por ejemplo, artículos de medios, comunicados de prensa, blogs, redes sociales, anuncios, etc. Este texto impreso y hablado se utiliza para presentar mensajes o argumentos que pueden o no incluir números o gráficos. El texto es la herramienta principal para comunicar el contexto, y se deduce que la comprensión del texto es una habilidad fundamental y requisito previo para el éxito en la alfabetización matemática. El desafío que esto crea para PISA y el desarrollo de preguntas no es insignificante. Por un lado, la evaluación debe presentar mensajes cuantitativos socialmente significativos utilizando texto enriquecido, por otro lado, la naturaleza comparativa de la evaluación, los muchos idiomas a los que se traduce y la amplia gama de niveles de comprensión de texto entre los participantes de 15 años, limita la riqueza del texto que puede ser

utilizado de manera realista. Este desafío se discute más adelante en la sección sobre desarrollo de preguntas.

Contextos

Un aspecto importante de la alfabetización matemática es que las matemáticas se utilizan para resolver un conjunto de problemas en un contexto, el cual es el aspecto del mundo de un individuo en el que se ubican los problemas. La elección de estrategias y representaciones matemáticas apropiadas depende a menudo del contexto en el que surge un problema, y por implicación existe la necesidad de utilizar el conocimiento del contexto del mundo real para desarrollar el modelo. El hecho de poder trabajar dentro de un contexto es muy apreciado para imponer demandas adicionales sobre el solucionador de problemas (ver Watson y Callingham, (2003_[29]), para los hallazgos sobre estadísticas. Para PISA, es importante utilizar una amplia variedad de contextos. Esto ofrece la posibilidad de conectarse con la gama más amplia posible de intereses individuales y con la gama de situaciones a las que las personas se enfrentan en el siglo XXI.

En vista del número de países que participan en PISA 2021 y con el aumento de la cantidad de participantes de países de bajos y medianos ingresos, así como la posibilidad de niños de 15 años sin escolarizar, es importante que los desarrolladores de preguntas sean muy cuidadosos para garantizar que los contextos utilizados en dichas preguntas sean accesibles para una amplia gama de participantes. A este respecto, también es importante que la carga de lectura de las preguntas sea modesta para que éstos continúen evaluando la alfabetización matemática.

Para los fines del marco de la prueba matemáticas PISA 2021, las cuatro categorías de contexto del marco PISA 2012 se han conservado y se utilizan para el desarrollo de preguntas de evaluación. Cabe señalar que, si bien estos contextos están destinados a hacer parte del desarrollo de preguntas, no se espera que se presenten informes sobre estos contextos.

Personal - los problemas clasificados en la categoría de contexto personal se centran en las actividades de uno mismo, de la familia o del grupo de pares. Los tipos de contextos que pueden considerarse personales incluyen (pero no se limitan a) aquellos relacionados con la preparación

de alimentos, compras, juegos, salud, transporte, recreación, deportes, viajes, programación y finanzas personales.

Ocupacional - los problemas clasificados en la categoría de contexto ocupacional se centran en el mundo del trabajo. Las preguntas categorizadas como ocupacionales pueden incluir (pero no están limitados a) cosas tales como medir, calcular costes y ordenar materiales para construcción, nómina/contabilidad, control de calidad, programación/inventario, diseño/arquitectura y toma de decisiones relacionadas con el trabajo con o sin la tecnología adecuada. Los contextos ocupacionales pueden relacionarse con cualquier nivel de la fuerza laboral, desde el trabajo no calificado hasta los niveles más altos de trabajo profesional, teniendo en cuenta que las preguntas de PISA deben ser accesibles para estudiantes de 15 años.

Social - los problemas clasificados en la categoría de contexto social se centran en la comunidad de uno (ya sea local, nacional o global). Pueden involucrar (pero no están limitados a) cosas tales como sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, salud, entretenimiento, estadísticas nacionales y economía. Aunque los individuos están involucrados en todas estas cosas de manera personal, en la categoría de contexto social, el foco de los problemas está en la perspectiva de la comunidad.

Científico - los problemas clasificados en la categoría científica se relacionan con la aplicación de las matemáticas al mundo natural y los problemas, así como los temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Los contextos particulares pueden incluir (pero no se limitan a) áreas como el ambiente o el clima, la ecología, la medicina, la ciencia espacial, la genética, la medición y el mundo de las matemáticas en sí. Las preguntas que son intra-matemáticas, donde todos los elementos involucrados pertenecen al mundo de las matemáticas, caen dentro del contexto científico.

Las preguntas de evaluación de PISA se organizan en unidades que comparten material de estímulo. Por lo tanto, generalmente, todas las preguntas de la misma unidad pertenecen a la misma categoría de contexto. Surgen excepciones; por ejemplo, que el material de estímulo puede examinarse

desde un punto de vista personal en una pregunta y un punto de vista social en otro. Cuando una pregunta involucra solo constructos matemáticos sin referencia a los elementos contextuales de la unidad dentro de la cual está ubicado, se asigna a la categoría de contexto personal. En el caso inusual de una unidad que involucra solo constructos matemáticos y que no tiene referencia a ningún contexto fuera de las matemáticas, la unidad se asigna a la categoría de contexto científico.

El uso de estas categorías de contexto proporciona la base para seleccionar una combinación de contextos de preguntas y asegura que la evaluación refleje una amplia gama de usos de las matemáticas, que van desde los usos personales cotidianos hasta las demandas científicas de los problemas globales. Además, es importante que cada categoría de contexto se rellene con preguntas de evaluación que tengan una amplia gama de dificultades en las preguntas. Dado que el objetivo principal de estas categorías de contexto es desafiar a los estudiantes en una amplia variedad de contextos problemáticos, cada categoría debe contribuir sustancialmente a la medición de la alfabetización matemática. No debería darse el caso de que el nivel de dificultad de las preguntas de evaluación que representan una categoría de contexto sea sistemáticamente mayor o menor que el nivel de dificultad de las preguntas de evaluación en otra categoría.

Al identificar los contextos que pueden ser relevantes, es fundamental tener en cuenta que un propósito de la evaluación es valorar el uso del conocimiento y las competencias de contenido matemático que los estudiantes han adquirido antes de los 15 años. Por lo tanto, los contextos para las preguntas de evaluación se seleccionan a la luz de la relevancia para los intereses y las vidas de los estudiantes, además de las demandas que se les impondrán a medida que ingresen a la sociedad como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. Los gerentes de proyectos nacionales de los países que participan en las pruebas PISA están involucrados en juzgar el grado de tal relevancia.

Habilidades del siglo XXI

Existe un interés creciente en todo el mundo por las llamadas habilidades del siglo XXI y su posible inclusión en los sistemas educativos. La OCDE ha hecho una publicación centrada en tales competencias y ha patrocinado

un proyecto de investigación titulado *The Future of Education and Skills: An OECD 2030 Framework* (El futuro de la educación y las competencias: un marco de la OCDE 2030) en el que unos 25 países participan en un estudio internacional del currículo que incluye la incorporación de dichas competencias. El proyecto tiene como foco central el aspecto que debería tener el currículo en el futuro, centrándose inicialmente en las matemáticas y la educación física.

En los últimos 15 años, más o menos, una serie de publicaciones han tratado de aclarar la discusión y consideración de las habilidades del siglo XXI. Se proporciona un resumen de los informes clave y la conceptualización de las habilidades del siglo XXI en *PISA 2021 Mathematics: A Broadened Perspective* [EDU/PISA/GB(2017)][17]. Después de un análisis cuidadoso de estas publicaciones, los autores señalaron que se puede argumentar de forma sólida la inmersión de competencias específicas del siglo XXI en disciplinas concretas. Por ejemplo, será cada vez más importante enseñar a los estudiantes en la escuela cómo hacer argumentos razonables con la justificación adecuada. Los argumentos que hacen deben ser matemáticamente rigurosos, basados en una teoría sólida y lo suficientemente fuertes como para resistir las críticas y, sin embargo, siempre que sea posible, evitar referirse a los autores (p.ej., “lo dice en Internet”). Esto forma parte de la competencia fundamental para emitir juicios independientes y responsabilizarse por ellos (OECD, 2005_[30]). En el contexto social, no es suficiente tener la razón; uno debe ser capaz y estar listo para presentar argumentos y defenderlos. Aprender matemáticas, con su claridad de contextos y un fuerte énfasis en el razonamiento lógico y el rigor en el nivel apropiado, es una oportunidad perfecta para practicar y desarrollar la capacidad para este tipo de argumentación.

Del mismo modo, en la era moderna, es fundamental proveer a los estudiantes con herramientas que puedan usar para defenderse de las mentiras e inferencias que pretenden basarse en el razonamiento matemático. Muy a menudo es suficiente cierta fluidez en el razonamiento lógico; una mentira generalmente esconde alguna contradicción. El estado de alerta de las mentes jóvenes ante posibles contradicciones puede desarrollarse más fácilmente en buenas clases de matemáticas.

Utilizando la lógica de encontrar la intersección entre las habilidades genéricas del siglo XXI y las habilidades relacionadas pero específicas de la asignatura, que son una parte natural de la instrucción relacionada con esa asignatura, se encuentran las siguientes ocho habilidades del siglo XXI identificadas para ser incluidas en el marco de evaluación de PISA 2021:

- Pensamiento crítico
- Creatividad
- Investigación y consulta
- Autodirección, iniciativa y persistencia
- Uso de la información
- Pensamiento sistémico
- Comunicación
- Reflexión

Evaluación de la alfabetización matemática

Esta sección describe el enfoque adoptado para implementar los elementos del marco descritos en secciones anteriores en la prueba PISA para 2021. Esto incluye la estructura del componente matemático de la prueba PISA, la distribución deseada de pesos porcentuales para el razonamiento matemático y los procesos de resolución de problemas; la distribución porcentual por área de contenido; una discusión sobre el rango de dificultades de las preguntas; la estructura del cuestionario; el papel de la evaluación por ordenador de las matemáticas; el diseño de las preguntas de evaluación; y la presentación de informes de niveles de competencia matemática.

Estructura de la evaluación matemática PISA 2021

De acuerdo con la definición de alfabetización matemática, las preguntas de evaluación utilizados en cualquier instrumento que se desarrolle como parte de la prueba PISA, se establecen dentro de un contexto. Las preguntas involucran la aplicación de conceptos matemáticos importantes, conocimiento, comprensión y habilidades (conocimiento del contenido matemático) en el nivel apropiado para estudiantes de 15 años, como se describió anteriormente. El marco se utiliza para guiar la estructura y el contenido de la evaluación, y es importante que el instrumento de medición incluya un equilibrio apropiado de preguntas que reflejen los componentes del marco de alfabetización matemática.

MARCO PARA
LA PRUEBA DE
MATEMÁTICAS
PISA 2021

Distribución deseada de puntos porcentuales por razonamiento matemático y proceso de resolución de problemas

Las preguntas de evaluación en el cuestionario de matemáticas PISA 2021 se pueden asignar a razonamiento matemático o a uno de los tres procesos

asociados con la resolución de problemas. El objetivo en la construcción de la evaluación es lograr un equilibrio que proporcione una ponderación aproximadamente igual entre los dos procesos que implican hacer una conexión entre el mundo real y el mundo matemático (formulación e interpretación/evaluación), y entre el razonamiento matemático y el emplear, que requiere que los estudiantes estén capacitados para trabajar en un problema formulado matemáticamente. Si bien es cierto que el razonamiento matemático puede observarse dentro del proceso de formulación, interpretación y empleo, las preguntas solo contribuirán a un dominio.

| | | Peso porcentual en PISA 2021 |
|---|--|------------------------------|
| Razonamiento matemático | | Aproximadamente 25 |
| Resolución matemática de problemas | Formulación de situaciones matemáticamente | Aproximadamente 25 |
| | Empleo de conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento | Aproximadamente 25 |
| | Interpretación, aplicación y evaluación de resultados matemáticos | Aproximadamente 25 |
| TOTAL | | 100 |

TABLA 1. Distribución aproximada por dominio para PISA 2021

Es importante tener en cuenta que las preguntas en cada categoría de proceso deben tener un rango de dificultad y demanda matemática. Esto se aborda en la tabla de demandas de razonamiento matemático y en cada uno de los procesos de resolución de problemas.

Distribución deseada por categoría de contenido

Las preguntas de matemáticas de PISA se seleccionan para reflejar el conocimiento del contenido matemático descrito anteriormente en este marco. Las preguntas de tendencia seleccionados para PISA 2021 se distribuirán entre las cuatro categorías de contenido, como se muestra en la Tabla.

El objetivo al construir la prueba es una distribución de preguntas con respecto a la categoría de contenido que proporcione una distribución lo más equilibrada posible de las puntuaciones, ya que todos estos dominios son importantes para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

| Categoría de contenido | Peso porcentual en PISA 2021 |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| Cambio y relaciones | Aproximadamente 25 |
| Espacio y forma | Aproximadamente 25 |
| Cantidad | Aproximadamente 25 |
| Incertidumbre y datos | Aproximadamente 25 |
| TOTAL | 100 |

TABLA 2. Distribución aproximada de puntuación por categoría de contenido para PISA 2021.

Es importante tener en cuenta que las preguntas en cada categoría de contenido deben tener un rango de dificultad y demanda matemática.

Rango de dificultad en las preguntas

El estudio de alfabetización matemática PISA 2021 incluye preguntas con una amplia gama de dificultades que van en paralelo al rango de habilidades de los estudiantes de 15 años. Incluye preguntas que son retadoras para los estudiantes más hábiles, y preguntas que son adecuadas para los estudiantes de menor habilidad. Desde una perspectiva psicométrica, un estudio que ha sido diseñado para medir una cohorte de personas en particular es más eficaz y eficiente cuando la dificultad de las preguntas de evaluación coincide con la habilidad de los sujetos medidos. Además, las escalas de competencia descritas que se utilizan como parte central del informe de resultados PISA, solo pueden incluir detalles útiles para todos los estudiantes si las preguntas desde los que se toman las descripciones de conocimientos abarcan el rango de las habilidades descritas.

La **Tabla 3** describe el rango de acciones que se espera de los estudiantes para el razonamiento matemático y cada uno de los procesos de

resolución de problemas. Estas listas describen las acciones que las preguntas exigirán a los estudiantes. Para cada categoría hay ciertas preguntas marcadas con “**” para denotar las acciones esperadas de los estudiantes que se realizarán en los niveles 1a, 1b y 1c, así como el nivel 2 de la escala de habilidad. Los desarrolladores de preguntas deberán asegurarse de que haya preguntas suficientes en el extremo inferior de la escala de desempeño para permitir que los estudiantes en estos niveles puedan mostrar de qué son capaces.

Para obtener información útil para los nuevos niveles inferiores, 1b y 1c, es vital que el contexto y el idioma no interfieran en las matemáticas evaluadas. Para ello, el contexto y el idioma deben ser examinados cuidadosamente. Ahora bien, las preguntas todavía deben ser interesantes para evitar la posibilidad de que los estudiantes simplemente no los intenten por falta de interés.

El contexto para las preguntas de nivel 1b y 1c debe ser de situaciones que los estudiantes encuentren a diario. Ejemplos de estos contextos pueden incluir dinero, temperatura, alimentos, tiempo, fecha, peso, tamaño y distancia. Todas las preguntas deben ser concretas y no abstractas. El enfoque de la pregunta debe ser exclusivamente matemático. El entendimiento del contexto no debe interferir con el desempeño de la pregunta.

De igual importancia es que todas las preguntas estén formuladas en los términos más sencillos posibles. Las oraciones deben ser cortas y directas. Se deben evitar las oraciones compuestas, los sustantivos compuestos y las oraciones condicionales. El vocabulario utilizado en las preguntas debe ser examinado cuidadosamente para garantizar que los estudiantes tengan un claro entendimiento de lo que se está pidiendo. Además, se prestará especial atención para asegurar que no se añada ninguna dificultad extra debido a una carga de texto pesada o a un contexto que no les sea familiar a los estudiantes con base en su bagaje cultural.

Las preguntas diseñadas para el Nivel 1c deben pedir un solo paso u operación. Sin embargo, es importante observar que un solo paso u operación no se limita a un paso aritmético. Este paso podría demostrarse mediante la selección o identificación de alguna información. Tanto el razonamiento matemático como todos los procesos de resolución de problemas deben utilizarse para medir las capacidades de los estudiantes en los Niveles 1b y 1c.

TABLA 3. Acciones de estudiantes previstas para el razonamiento matemático y cada uno de los procesos de resolución de problemas

| Razonamiento |
|--|
| ** Sacar una conclusión sencilla |
| ** Seleccionar una justificación apropiada |
| ** Explicar por qué un resultado matemático o conclusión tiene o no sentido dado el contexto de un problema |
| Representar un problema de manera diferente, incluyendo su organización según conceptos matemáticos y haciendo suposiciones apropiadas |
| Utilizar definiciones, reglas y sistemas formales, y emplear algoritmos y pensamiento computacional |
| Explicar y defender una justificación para la representación identificada o ideada de una situación del mundo real |
| Explicar o defender una justificación de los procesos y procedimientos o simulaciones utilizados para determinar un resultado o solución matemático |
| Identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema |
| Entender definiciones, reglas y sistemas formales, y emplear algoritmos y razonamiento computacional |
| Proporcionar una justificación para la representación identificada o ideada de una situación del mundo real |
| Proporcionar una justificación de los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemáticos |
| Reflexionar sobre argumentos matemáticos, explicando y justificando el resultado matemático |
| Criticar los límites del modelo utilizado para resolver un problema |
| Interpretar un resultado matemático de vuelta al contexto del mundo real para explicar el significado de los resultados |
| Explicar las relaciones entre el lenguaje específico al contexto de un problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para representarlo matemáticamente. |
| Reflexionar sobre argumentos matemáticos, explicando y justificando el resultado matemático |
| Reflexionar sobre soluciones matemáticas y crear explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o califiquen una solución matemática a un problema contextualizado |
| Analizar similitudes y diferencias entre un modelo computacional y el problema matemático que este está modelando |
| Explicar cómo funciona un algoritmo sencillo y detectar y corregir errores en algoritmos y programas |

| Formular | Emplear | Interpretar |
|--|---|---|
| ** Seleccionar una descripción matemática o una representación que describa un problema | ** Realizar un cálculo sencillo | ** Interpretar un resultado matemático de vuelta al contexto del mundo real |
| ** Identificar las variables clave en un modelo | ** Seleccionar una estrategia apropiada a partir de una lista | ** Identificar si un resultado matemático o conclusión tiene o no sentido dado el contexto de un problema. |
| ** Seleccionar una representación apropiada al contexto del problema | ** Implementar una estrategia dada para determinar una solución matemática | ** Identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema |
| Leer, descifrar y asimilar declaraciones, preguntas, tareas, objetos o imágenes para crear un modelo de la situación | ** Hacer diagramas, gráficas o construcciones matemáticas o artefactos de computación | Utilizar herramientas matemáticas o simulaciones computarizadas para determinar la razonabilidad de una solución matemática y cualquier limitación o restricción en dicha solución, dado el contexto del problema |
| Reconocer la estructura matemática (incluyendo las regularidades, relaciones y patrones) en problemas o situaciones | Comprender y utilizar constructos basados en definiciones, reglas y sistemas formales incluyendo el empleo de algoritmos familiares | Interpretar resultados matemáticos en diversos formatos en relación con una situación o uso; comparar o evaluar dos o más representaciones en relación con una situación |

La **Tabla 3** es una reformulación de la figura utilizada en marcos anteriores para vincular los procesos matemáticos con las capacidades matemáticas. Todos los ejemplos e ilustraciones de esa figura se incluyen en esta reformulación.

| Formular | Emplear | Interpretar |
|---|---|---|
| Identificar y describir los aspectos matemáticos de una situación problema del mundo real incluyendo la identificación de las variables significativas | Desarrollar diagramas, gráficas o construcciones matemáticas o artefactos de computación y extraer información matemática de ellos | Utilizar conocimientos sobre cómo el mundo real tiene efectos en los resultados y cálculos de un procedimiento o modelo matemático, para hacer juicios contextuales sobre cómo deben ajustarse o aplicarse los resultados |
| Simplificar o descomponer una situación o problema para hacer que favorezca el análisis matemático | Manipular números, información gráfica y datos estadísticos, expresiones y ecuaciones algebraicas y representaciones geométricas | Construir y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema |
| Reconocer aspectos de un problema que correspondan con problemas conocidos o conceptos, hechos o procedimientos matemáticos | Articular una solución, mostrando o resumiendo y presentando resultados matemáticos intermedios | Reconocer [demostrar, interpretar, explicar] el alcance y los límites de conceptos y soluciones matemáticos |
| Traducir un problema a una representación matemática estándar o un algoritmo | Utilizar herramientas matemáticas, incluyendo la tecnología, simulaciones y pensamiento computacional, para ayudar a encontrar soluciones exactas o aproximadas | Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Utilizar este entendimiento para ayudar a interpretar la solución en contexto y medir la viabilidad y posibles limitaciones de la solución |
| Utilizar herramientas matemáticas (mediante el uso de variables, símbolos, diagramas apropiados) para describir las estructuras y relaciones matemáticas en un problema | Asimilar, relacionar y utilizar diversas representaciones al interactuar con un problema | |

| Formular | Emplear | Interpretar |
|--|---|-------------|
| Aplicar herramientas matemáticas y herramientas de computo para representar relaciones matemáticas | Cambiar entre diferentes representaciones en el proceso de encontrar soluciones | |
| Identificar las limitaciones, hipótesis y simplificaciones en un modelo matemático | Utilizar un procedimiento de múltiples pasos que conduzca a una solución, conclusión o generalización matemática | |
| | Utilizar un entendimiento del contexto para orientar o acelerar el proceso de solución matemática, por ejemplo, trabajando a un nivel de exactitud apropiado para un contexto | |
| | Hacer generalizaciones basadas en los resultados de aplicar procedimientos matemáticos para encontrar soluciones | |

Pruebas de matemáticas por ordenador

El principal modo de aplicación de PISA 2021 será la prueba de matemáticas por ordenador. La transición se ha anticipado con el traslado de los estudios de 2015 y 2018 a la aplicación informática. Para mantener tendencias en los diferentes estudios, las evaluaciones de 2015 y 2018 fueron neutras en cuanto al uso de ordenador a pesar de utilizar un modo de aplicación informático. La transición a una evaluación de matemáticas por ordenador por completo en 2021 ofrece diversas

oportunidades para desarrollar la evaluación de la alfabetización matemática de tal manera que se armonice mejor con la naturaleza cambiante de las matemáticas en el mundo moderno, garantizando al mismo tiempo tendencias en retroceso a ciclos anteriores. Estas oportunidades incluyen nuevos formatos de pregunta (por ejemplo, arrastrar y soltar); presentarles a los estudiantes datos del mundo real (por ejemplo, conjuntos de datos grandes y clasificables); crear modelos o simulaciones matemáticos que los estudiantes puedan explorar cambiando los valores de las variables; ajustar curvas y utilizar la curva que mejor se ajuste para hacer predicciones). La Prueba de Matemáticas por Ordenador (PMO), además de proporcionar una gama más amplia de tipos de preguntas y oportunidades matemáticas, también permite la evaluación adaptativa.

La capacidad de evaluación adaptativa de la PMO, que se había aplicado anteriormente en la evaluación de lectura PISA, ofrece la oportunidad de describir mejor qué es lo que los estudiantes en ambos extremos del espectro de desempeño son capaces de hacer. Al proporcionar a los estudiantes combinaciones individuales de unidades de pruebas según sus respuestas y puntuaciones en las primeras unidades a las que responden, se genera información cada vez más detallada sobre las características de desempeño de los estudiantes en ambos extremos de la escala de desempeño.

El hacer uso de las mejoras ofrecidas por la tecnología informática tiene como resultado preguntas de evaluación que motivan más a los estudiantes, son más atractivas visualmente y más fáciles de entender. Por ejemplo, se les puede presentar a los estudiantes un estímulo en movimiento, representaciones de objetos tridimensionales que se pueden rotar o tener acceso más flexible a la información pertinente. Los nuevos formatos de preguntas, como los que piden a los estudiantes que “arrastren y suelten” o utilicen “puntos calientes” en una imagen, están diseñados para involucrar más a los estudiantes, para permitir una gama más amplia de tipos de respuesta y dar una imagen más completa de la alfabetización matemática. Un desafío clave es garantizar que estas preguntas continúen evaluando *conocimientos de matemáticas* y que se mantenga al mínimo la interferencia de dimensiones irrelevantes del dominio.

Las investigaciones demuestran que las demandas matemáticas del trabajo ocurren cada vez más en presencia de la tecnología informática

para que se fusionen (Hoyles et al., 2002_[31]) los conocimientos de matemáticas y el uso de ordenadores. Para los trabajadores en todos los niveles del lugar de trabajo, hay ahora una interdependencia entre los conocimientos de matemáticas y el uso de tecnología informática. Un desafío clave es distinguir las demandas matemáticas de una pregunta informatizada de PISA, de las demandas no relacionadas con la competencia matemática, como las demandas de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) de la pregunta, y el formato de presentación. Solucionar preguntas de PISA en un ordenador en lugar de sobre el papel lleva a PISA a la realidad y a las demandas del siglo XXI.

Las preguntas que parecen bien adaptadas a la PMO y la naturaleza cambiante de los conocimientos de matemáticas incluyen:

- Una simulación en la que se ha establecido un modelo matemático y los estudiantes pueden cambiar los valores variables para explorar el impacto de las variables con el fin de crear “una solución óptima”.
- Ajustar una curva (mediante la selección de una curva desde un conjunto limitado de curvas provisto) a un conjunto de datos o una imagen geométrica para determinar el “mejor ajuste” y utilizar la curva de ajuste resultante para determinar la respuesta a una pregunta sobre la situación.
- Situaciones de presupuesto (por ejemplo, un almacén en línea) en las que el estudiante debe seleccionar combinaciones de productos para alcanzar un rango de objetivos dentro de un presupuesto determinado.
- Simulación de compra en la que el estudiante selecciona entre diferentes opciones de préstamo y reembolso de colaboradores para comprar un artículo mediante un préstamo y el cumplimiento de un presupuesto. El desafío en el problema es entender cómo interactúan las variables.
- Problemas que incluyen codificación visual para lograr una secuencia dada de acciones.

A pesar de las oportunidades que la PMO presenta (descritas más arriba), es importante que esta prueba se siga centrado en evaluar conocimientos de matemáticas y no pase a evaluar las habilidades en TIC. De manera similar, es importante que las simulaciones y otras preguntas que apunten a lo anterior no sean tan “ruidosas” que se pierdan los procesos de razonamiento matemático y resolución de problemas.

La PMO también debe retener algunas de las características de la versión en papel, por ejemplo, la capacidad de volver a preguntas ya realizadas, aunque en el contexto de las pruebas adaptativas esta necesidad se limite a la unidad en la que está trabajando el estudiante.

Diseño de las preguntas de matemáticas de PISA 2021

Se utilizan tres tipos de formato de preguntas para evaluar la alfabetización matemática en PISA 2021: preguntas de respuesta abierta, respuesta cerrada y respuesta de selección (selección múltiple).

- Las preguntas de respuesta abierta requieren una respuesta escrita algo extendida por parte del estudiante. Dichas preguntas también pueden pedir al estudiante que muestre los pasos dados o que explique cómo se alcanzó la respuesta. Estas preguntas requieren que los expertos capacitados codifiquen manualmente las respuestas de los estudiantes. Para facilitar la función de evaluación adaptativa de la PMO, será necesario minimizar el número de preguntas que dependan de expertos capacitados para codificar las respuestas de los estudiantes.
- Las preguntas de respuesta cerrada proporcionan un entorno más estructurado para presentar soluciones a problemas, y producen una respuesta de los estudiantes que puede ser juzgada fácilmente como correcta o incorrecta. A menudo, las respuestas de los estudiantes a preguntas de este tipo pueden codificarse de manera automática. Las respuestas cerradas utilizadas más frecuentemente son números únicos.
- Las preguntas de respuesta de selección requieren la selección de una o más respuestas a partir de varias opciones de respuesta. Las respuestas a estas preguntas generalmente pueden ser procesadas de manera automática. Se está utilizando cerca del mismo número de cada tipo de formato de pregunta para construir los instrumentos de medición.

El estudio de matemáticas PISA está compuesto de unidades de evaluación que comprenden material de estímulo por escrito y otra información como tablas, gráficos o diagramas, más una o más preguntas que están vinculadas a este material de estímulo común. Este formato les da a los estudiantes la oportunidad de involucrarse con un contexto o problema respondiendo una serie de preguntas relacionadas.

Las preguntas seleccionadas para su inclusión en el estudio PISA representan una amplia gama de dificultades para coincidir con el amplio rango de habilidades de los estudiantes que participan en la evaluación.

Además, están representadas todas las categorías principales de la evaluación (las categorías de contenido; categorías de razonamiento matemático y resolución de problemas y las diferentes categorías de contexto y habilidades del siglo XXI) con preguntas de una amplia gama de dificultades. Las dificultades de las preguntas se establecen como una de varias propiedades de medición en un amplio estudio de campo antes de seleccionar las preguntas para el estudio principal de PISA. Las preguntas se seleccionan para su inclusión en los instrumentos de estudio PISA sobre la base de su adaptación a las categorías marco y sus propiedades de medición.

Además, el nivel de lectura requerido para interactuar de manera satisfactoria con una pregunta se contempla muy cuidadosamente en el desarrollo y selección de las preguntas. Un objetivo en el desarrollo de preguntas es hacer que la redacción de las preguntas sea tan sencilla y directa como sea posible. También se tiene cuidado de evitar contextos de preguntas que crearían un sesgo cultural y todas las opciones son revisadas con los equipos nacionales. La traducción de las preguntas a muchos idiomas se realiza de manera muy cuidadosa, con una extensa traducción inversa y otros protocolos.

PISA 2021 incluirá una herramienta que permita a los estudiantes proporcionar respuestas construidas digitadas y mostrar su trabajo según sea necesario para la alfabetización matemática. La herramienta permite a los estudiantes insertar tanto texto como números. Al hacer clic en el botón apropiado, los estudiantes pueden insertar una fracción, raíz cuadrada o exponente. Se dispone de símbolos adicionales como π y mayor/menor que, así como los signos de operación tales como multiplicación y división. Un ejemplo se muestra en la **Figura 3** a continuación.

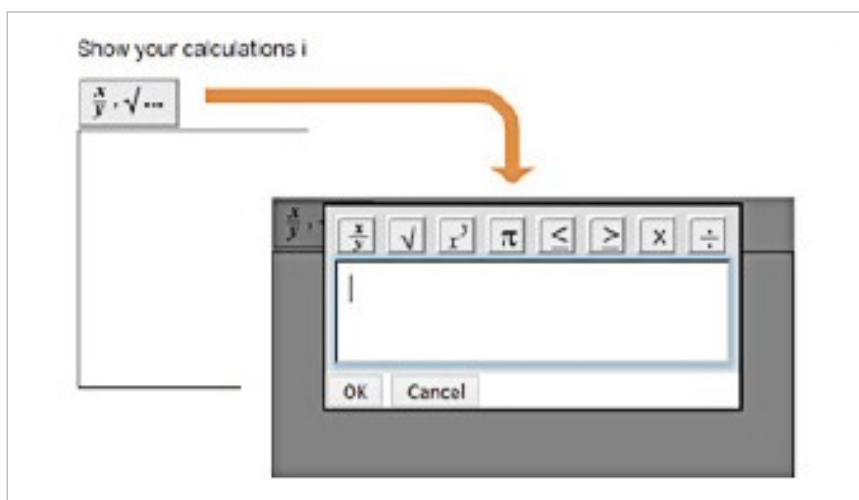


FIGURA 3. Ejemplo de la herramienta de editor PISA 2021

También se espera que el conjunto de herramientas disponibles para los estudiantes incluya una calculadora científica básica. Los operadores que se incluirán son suma, resta, multiplicación y división, así como raíz cuadrada, pi, paréntesis, exponente, cuadrado, fracción (y/x), inverso ($1/x$) y la calculadora será programada para respetar el orden estándar de las operaciones.

Los estudiantes que tomen la evaluación en papel pueden tener acceso a una calculadora de mano, según lo aprobado para su uso por estudiantes de 15 años, en sus respectivos sistemas escolares.

Calificación de preguntas

Aunque la mayoría de las preguntas se califica de manera dicotómica (es decir, a las respuestas se les concede crédito o no crédito), las preguntas de respuesta construida abierta pueden involucrar a veces puntuaciones de crédito parcial, lo que permite que a las respuestas se les asigne crédito según diferentes grados de adecuación a la habilidad que se espera medir. Se prevé que la necesidad de puntuación con crédito parcial será particularmente significativa para las preguntas de razonamiento matemático que rara vez involucrarán la producción de respuestas de un único número, sino más bien respuestas con uno o más elementos.

Informes de competencia en matemáticas

Los resultados del estudio de matemáticas PISA se reportan de varias maneras. Se obtienen estimaciones de alfabetización matemática generales para los estudiantes incluidos en el muestreo en cada país participante, y se definen varios niveles de competencia. También se desarrollan descripciones del grado de alfabetización matemática típicos de los estudiantes en cada nivel. Para PISA 2021, los seis niveles de desempeño reportados para matemáticas PISA en ciclos anteriores se ampliarán de la siguiente manera: El Nivel 1 pasará a llamarse Nivel 1a, y la tabla que describe los desempeños se ampliará para incluir los Niveles 1b y 1c. Estos niveles adicionales se han añadido para proporcionar una mayor granularidad en los informes de los estudiantes con desempeño en el extremo inferior de la escala de habilidad.

Además de la escala general de matemáticas, después de la Prueba de Campo se desarrollan escalas adicionales de desempeño descritas, y estas

luego se informan. Estas escalas adicionales son para el razonamiento matemático y para los tres procesos de solución de problemas matemáticos: *formular situaciones matemáticamente; emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos; e interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos.*

Conocimientos de matemáticas y los cuestionarios de antecedentes

Desde el primer ciclo PISA, los cuestionarios de contexto de los estudiantes y los centros educativos han servido a dos propósitos interrelacionados al servicio del objetivo más amplio de evaluar los sistemas educativos: primero, los cuestionarios proporcionan un contexto a través del cual interpretar los resultados PISA dentro de cada sistema educativo y entre sistemas educativos. En segundo lugar, el objetivo de los cuestionarios es proporcionar una medición confiable y válida de indicadores educativos adicionales, que pueden orientar políticas e investigaciones por derecho propio.

Dado que la alfabetización matemática es el dominio principal en el estudio 2021, se espera que los cuestionarios de antecedentes proporcionen no solo datos de tendencias para los constructos que se siguen evaluando, sino que además proporcionen información rica sobre las innovaciones evidentes en el marco de la alfabetización matemática de PISA 2021. En particular, se espera que la alfabetización matemática tenga un papel destacado en el análisis de los constructos contextuales específicos a cada dominio, así como en varias categorías de enfoque de políticas que van desde variables a nivel individual tales como la demografía y características sociales y emocionales hasta las prácticas, políticas e infraestructura escolares (OECD, 2018_[32]).

Dos áreas amplias de actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas que los predisponen al involucramiento productivo en matemáticas fueron identificadas como de interés potencial como un complemento a la evaluación de matemáticas PISA 2012. Estas son el interés de los estudiantes en las matemáticas y su voluntad de participar en ellas. Se espera que estos sigan siendo un enfoque de los cuestionarios en 2021.

El interés en las matemáticas tiene componentes relacionados con actividades presentes y futuras. Las preguntas relevantes se centran en el interés de los estudiantes en las matemáticas en el centro educativo, si las consideran útiles en la vida real, y sus intenciones de realizar más

estudios en matemáticas y participar en carreras orientadas a las matemáticas. Hay preocupación a nivel internacional sobre esta área, porque en muchos países participantes hay una disminución en el porcentaje de estudiantes que están eligiendo estudios futuros relacionados con las matemáticas, mientras que al mismo tiempo hay una necesidad creciente de profesionales en estas áreas.

La disposición de los estudiantes a hacer matemáticas está relacionada con las actitudes, emociones y creencias relacionadas con los mismos estudiantes que los predisponen a, o les impiden, beneficiarse de la alfabetización matemática que han logrado. Los estudiantes que disfrutan de la actividad matemática y sienten confianza en emprenderla, son más propensos a utilizar las matemáticas para pensar en las situaciones que encuentran en las diversas facetas de sus vidas, dentro y fuera del centro educativo. Los constructos del estudio PISA que son relevantes a esta área incluyen las emociones de disfrute, confianza y (falta de) ansiedad hacia las matemáticas, y las creencias de los estudiantes respecto de sí mismos en cuanto a su auto-concepto y auto-eficacia.

Un análisis del progreso posterior de los jóvenes australianos que tuvieron bajas puntuaciones en PISA a los 15 años encontró que aquellos que “reconocen el valor de las matemáticas para su éxito futuro son más propensos a lograr este éxito, y eso incluye ser felices con muchos aspectos de sus vidas personales, así como su futuro y sus carreras” (Hillman and Thomson, 2010, p. 31_[33]). El estudio señala a modo de recomendación que un enfoque en las aplicaciones prácticas de las matemáticas en la vida cotidiana puede ayudar a mejorar las perspectivas de estos estudiantes con bajo rendimiento.

Las innovaciones evidentes en el marco de matemáticas en PISA 2021 apuntan a al menos cuatro áreas en las que los cuestionarios de antecedentes pueden proporcionar datos ricos. Estas áreas son: **razonamiento matemático; pensamiento computacional** y el papel de la tecnología en el hacer y el enseñar las matemáticas; las **cuatro áreas de contenido focal**; y las **habilidades del siglo XXI en el contexto de las matemáticas**.

Razonamiento matemático

El marco de matemáticas PISA 2021, destaca el razonamiento matemático habilitado por algunos entendimientos clave que apuntalan las matemáticas escolares (entendimiento de cantidad, sistemas de números

y sus propiedades algebraicas; apreciación del poder de la abstracción y la representación simbólica; visión de estructuras matemáticas y sus regularidades; reconocimiento de relaciones funcionales entre las cantidades; uso del modelado matemático como un lente hacia el mundo real; y entendimiento de la variación como el corazón de la estadística).

El enfoque en el razonamiento tiene implicaciones para los cuestionarios de antecedentes que deben proporcionar medidas para comprender las oportunidades de los estudiantes de aprender a razonar matemáticamente y emplear los entendimientos clave que apuntalan las matemáticas escolares. En particular, los cuestionarios deben establecer la frecuencia con la que los estudiantes, por ejemplo:

- Identifican, reconocen, organizan, conectan y representan;
- construyen, abstraen, evalúan, deducen, justifican, explican y defienden; e
- interpretan, emiten juicios, critican, refutan y califican.

Además de establecer la frecuencia de las oportunidades para (aprender a) razonar, los cuestionarios deben llegar a las formas que toman estas oportunidades (verbal o escrita).

Por último, en lo que respecta al razonamiento, los cuestionarios deben tener un sentido de la voluntad de los estudiantes de persistir en tareas que involucran el razonamiento.

En el caso de docentes y de la enseñanza, existe la necesidad de comprender mejor cómo ven el papel del razonamiento en las matemáticas en general y en sus prácticas de enseñanza y evaluación en particular.

Pensamiento computacional

Los aspectos del pensamiento computacional forman una dimensión en rápida evolución y crecimiento, tanto de las matemáticas como de los conocimientos de matemáticas. El marco de alfabetización matemática en PISA 2021 ilustra cómo el pensamiento computacional es parte del hacer matemáticas y tener un impacto en hacer matemáticas. Los módulos de valores y creencias sobre el aprendizaje y de apertura mental en los cuestionarios de antecedentes pueden explorar la experiencia de los estudiantes sobre el papel del pensamiento computacional en el hacer matemáticas.

El marco de alfabetización matemática en PISA 2021 pone de relieve las diferentes maneras en las que la tecnología está cambiando el mundo en el que vivimos y está cambiando lo que significa participar en las matemáticas. Algunas preguntas clave para los cuestionarios de antecedentes, incluyen el desarrollo de un profundo entendimiento de, primero, cómo las experiencias de matemáticas y de hacer matemáticas de los estudiantes están cambiando (si es que lo hacen) y, en segundo lugar, cómo la pedagogía en el aula está evolucionando debido al impacto que la tecnología está teniendo en cómo los estudiantes se dedican a las matemáticas y a los artefactos matemáticos y en lo que significa hacer matemáticas. En el caso de los estudiantes, es de interés comprender mejor cómo la tecnología está impactando el desempeño de los estudiantes, lo cual podría explorarse en el módulo de desempeño de tareas del marco del cuestionario. Los problemas pedagógicos podrían explorarse en los módulos de tiempo de aprendizaje y currículo y de prácticas de enseñanza.

El enfoque en el pensamiento computacional y el papel de la tecnología en el hacer y estudiar las matemáticas tiene implicaciones para los cuestionarios de fondo que deben proporcionar medidas para comprender mejor las oportunidades de los estudiantes de aprender en este sentido. En particular, los cuestionarios deben establecer la frecuencia con la que los estudiantes, por ejemplo:

- Diseñan o trabajan con simulaciones computarizadas o modelos computarizados;
- codifican o programan tanto dentro del aula de matemáticas como fuera de ella; y
- están expuestos a sistemas computarizados de matemáticas (incluido software de geometría dinámica; hojas de cálculo; software de programación como Logo y Scratch; calculadoras gráficas; juegos, etc.).

Cuatro áreas focales de contenido

En reconocimiento del mundo en evolución, el Marco de Matemáticas de PISA 2021 ha sugerido que cuatro áreas de contenido dentro del marco existente han de recibir un enfoque especial. Estas áreas de contenido son: fenómenos de crecimiento (dentro del cambio y las relaciones); aproximación geométrica (dentro del espacio y la forma); simulaciones

computarizadas (dentro de la cantidad); y toma de decisiones condicionadas (dentro de la incertidumbre y los datos). El enfoque en estas áreas de contenido tiene implicaciones para los cuestionarios de antecedentes que deben proporcionar medidas para comprender mejor las oportunidades de los estudiantes de aprender en este sentido. En particular, los cuestionarios deben establecer la frecuencia con la que los estudiantes están expuestos a este contenido y las diferentes formas que toman las oportunidades.

Habilidades del siglo XXI en el contexto de las matemáticas

El marco de alfabetización matemática de PISA 2021 introduce un conjunto particular de habilidades del siglo XXI como resultado del enfoque actual de las matemáticas. Los cuestionarios de antecedentes podrían examinar de manera productiva si las matemáticas están contribuyendo o no al desarrollo de estas habilidades y si las prácticas de enseñanza se centran en ellas. En particular, el módulo de *tiempo de aprendizaje y currículo* podría explorar si estas habilidades aparecen o no en el currículo promulgado.

Los resultados del estudio PISA 2021 proporcionarán información importante para los responsables de políticas educativas en los países participantes sobre resultados escolares relacionados con los logros y los resultados de la escolaridad relacionados con la actitud. Al combinar información de la evaluación PISA de alfabetización matemática y la información del estudio sobre actitudes, emociones y creencias que predisponen a los estudiantes a utilizar sus conocimientos de matemáticas, así como el impacto de los cuatro desarrollos descritos anteriormente, se producirá un panorama más completo.

El marco de alfabetización matemática en PISA 2021 mantiene la coherencia con los marcos de alfabetización matemática anteriores y, al mismo tiempo, reconoce que el mundo está cambiando y, con ello, cambia la demanda de ciudadanos que sean matemáticamente competentes para razonar matemáticamente en lugar de reproducir técnicas matemáticas como rutinas.

El objetivo de PISA con respecto a la alfabetización matemática es desarrollar indicadores que demuestren qué tan eficazmente los países están preparando a los estudiantes para utilizar las matemáticas en el aspecto cotidiano de sus vidas personales, cívicas y profesionales, como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos del siglo XXI. Para lograr esto, PISA ha desarrollado una definición de alfabetización matemática y un marco de evaluación que refleja los componentes importantes de esta definición.

Las preguntas de evaluación de matemáticas seleccionados para su inclusión en PISA 2021, basados en esta definición y marco, están destinados a reflejar un equilibrio entre razonamiento matemático, procesos de resolución de problemas, contenido matemático y contextos.

El diseño de evaluaciones garantizará la medición válida de la capacidad en todo el rango de habilidad que se extiende a dos niveles por debajo de la escala PISA anterior, al tiempo que se preservan la calidad y contenido de la evaluación.

La Prueba de Matemáticas por Ordenador que se utilizará a partir de 2021 proporciona preguntas en varios formatos con diferentes grados de orientación y estructura internos y una gama de formatos que mantienen de principio a fin un énfasis en problemas auténticos que requieren que los estudiantes razonen y demuestren su pensamiento.

Referencias

- Ananiadou, K. and M. Claro (2009), "21st Century Skills and Competences for New Millennium Learners in OECD Countries", *OECD Education Working Papers*, No. 41, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/218525261154>. [2]
- Basu, S. et al. (2016), "Identifying middle school students' challenges in computational thinking-based science learning", *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, Vol. 11/3, <http://dx.doi.org/10.1186/s41039-016-0036-2>. [19]
- Beheshti, E. et al. (2017), *Computational Thinking in Practice: How STEM Professionals Use CT in Their Work*, Northwestern University, San Antonio, Texas, <http://ccl.northwestern.edu/papers.shtml>. [21]
- Beloit College (2017), *The Beloit College Mindset List for the Class of 2021*, <https://www.beloit.edu/mindset/2021/>. [1]
- Benton, L. et al. (2017), "Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England", *Digital Experiences in Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 115-138, <http://dx.doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x>. [20]
- Box, G. and N. Draper (1987), *Empirical Model-Building and Response Surfaces*, John Wiley. [23]
- Brennan, K. and M. Resnick (2012), *New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking*, https://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf. [24]
- Devlin, K. (1994), *Mathematics: The Science of Patterns : The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*, W H Freeman & Co. [26]
- Fadel, C., M. Bialik and B. Trilling (2015), *Four-Dimensional Education: The Competencies Learners Need to Succeed*, CreateSpace Independent Publishing Platform. [3]
- Gadanidis, G. (2015), *Coding for Young Mathematicians*, Western University, London, Ontario, Canada, <http://worlddiscoveries.ca/technology/18155> (accessed on 5 April 2018). [9]
- Gadanidis, G., E. Clements and C. Yiu (2018), "Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians", *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 20/1, pp. 32-53, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403542>. [12]
- Galbraith, P., H. Henn and M. Niss (eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, Springer US, <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>. [18]
- Grover, S. (2018), *The 5th 'C' of 21st Century Skills? Try Computational Thinking (Not Coding) | EdSurge News*, <https://www.edsurge.com/news/2018-02-25-the-5th-c-of-21st-century-skills-try-computational-thinking-not-coding> (accessed on 5 April 2018). [15]
- Hillman, K. and S. Thomson (2010), *Against the odds: influences on the post-school success of 'low performers'*, NCVER, Adelaide, Australia, <https://www.ncver.edu.au/publications/publications/all-publications/against-the-odds-influences-on-the-post-school-success-of-low-performers#> (accessed on 5 April 2018). [33]
- Hoyles, C. et al. (2002), "Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council", *Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London*. (2002), <http://discovery.ucl.ac.uk/1515581/> (accessed on 5 April 2018). [31]
- Mahajan, S. et al. (2016), *PISA Mathematics in 2021*, Center for Curriculum Redesign, <http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf>. [27]
- Moore, D. (1997), "New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics", *International Statistical Review*, Vol. 65/2, pp. 123-165, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00390.x>. [28]

- National Research Council (2012), *Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century*, The National Academies Press, Washington D.C., https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse_070895.pdf (accessed on 5 April 2018). [4]
- Niemelä, P. et al. (2017), *Computational thinking as an emergent learning trajectory of mathematics*, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/3141880.3141885>. [16]
- OECD (2018), *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science*. [32]
- OECD (2017), *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>. [22]
- OECD (2017), *PISA for Development Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science, Preliminary Version*, OECD Publishing, Paris, <http://www.oecd.org/about/publishing/corrigenda.htm>. (accessed on 6 April 2018). [8]
- OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>. [7]
- OECD (2005), *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*, OECD, Paris, <http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf> (accessed on 5 April 2018). [30]
- OECD (2004), *The PISA 2003 Assessment Framework*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264101739-en>. [6]
- Pei, C., D. Weintrop and U. Wilensky (2018), "Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land", *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 20/1, pp. 75-89, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403543>. [13]
- Pratt, D. and R. Noss (2002), "The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness", *Journal of the Learning Sciences*, Vol. 11/4, pp. 453-488, http://dx.doi.org/10.1207/S15327809JLS1104_2. [11]
- Rambally, G. (2017), *Applications of Computational Matrix Algebra*, AACE, Austin, Texas, <https://www.learntechlib.org/p/177277/>. [10]
- Reimers, F. and C. Chung (2016), *Teaching and Learning for the Twenty-First Century : Educational Goals, Policies, and Curricula from Six Nations*, Harvard Education Press, Cambridge, MA. [5]
- Resnick, M. et al. (2009), "Scratch: Programming for all", *Communications of the ACM*, Vol. 52/11, p. 60, <http://dx.doi.org/10.1145/1592761.1592779>. [17]
- Steen, L. (1990), *On the Shoulders of Giants*, National Academies Press, Washington, D.C., <http://dx.doi.org/10.17226/1532>. [25]
- Watson, J. and R. Callingham (2003), "Statistical literacy: A Complex hierarchical construct", *Statistics Education Research Journal*, Vol. 2, pp. 3-46. [29]
- Weintrop, D. et al. (2016), "Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms", *Journal of Science Education and Technology*, Vol. 25/1, pp. 127-147, <http://dx.doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5>. [14]
- Weintrop, D. and U. Wilensky (2015), *To block or not to block, that is the question*, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/2771839.2771860>. [34]



MARCO PARA PRUEBA DE
MATEMÁTICAS

PISA 2021



Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, ICFES
Oficinas: Calle 26 No. 69-76 . Torre 2, pisos 15 -18
Edificio Elemento, Bogotá . Colombia