Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas[1]

Arithmetic Knowledge of prospective teachers. Strengths and Weaknesses

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-367-282

Miguel Ángel Montes
Luis Carlos Contreras
Universidad de Huelva. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Huelva. España.
María del Mar Liñán
Universidad de Sevilla. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Sevilla. España.
María Cinta Muñoz-Catalán
Nuria Climent
José Carrillo
Universidad de Huelva. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Huelva. España.

Resumen

Los medios de comunicación han alertado recientemente a la opinión pública acerca de una realidad que la investigación en educación matemática llevaba evidenciando las dos últimas décadas: la deficiente formación matemática de los

(1) Financiado por el proyecto PIE (1101), del Plan de Investigación Educativa de la Universidad de Huelva y el proyecto «Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas» (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad. Agradecemos su colaboración a las Universidades de Sevilla y al CES Cardenal Spínola CEU.

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

maestros. Estas deficiencias, que habíamos venido constatando de manera informal en nuestras universidades con los estudiantes para Maestro (EPM), son el objeto de estudio de nuestra investigación. En ese contexto, este artículo describe un estudio exploratorio tipo *survey* sobre el conocimiento matemático necesario para la enseñanza que tienen 737 estudiantes para Maestro de tres centros de formación de maestros de universidades andaluzas, realizado en el contexto de un Proyecto de Innovación Docente de una de ellas. Usando el marco de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) y, dentro de él, el subdominio relativo al conocimiento de los temas matemáticos, se elaboró un cuestionario que contenía ítems relativos a fracciones, decimales y porcentajes, contenidos que fueron elegidos tanto por su trascendencia intrínseca como por su aplicación a otros contenidos matemáticos y a otras disciplinas en el ámbito de la Educación Primaria. Esto nos ha permitido explorar el conocimiento que estos futuros profesores poseen sobre esos contenidos. Los resultados han mostrado un número importante de debilidades, algunas de las cuales ya habían sido descritas por la literatura de investigación, y también algunas fortalezas. En ambos casos, la información obtenida supone un referente para explorar la realidad de otros centros de formación de maestros; un elemento de reflexión para las autoridades académicas acerca de los procesos de selección para el acceso a la universidad y, más concretamente, a estos centros de formación; y un punto de partida para el rediseño de sus programas de formación.

Palabras clave: MTSK, estudiantes para Maestro, formación inicial, conocimiento profesional, aritmética.

Abstract

The social media have recently warned to public opinion about a truth that the research in mathematics education has been pointing up the last two decades: the poor mathematical training of primary teachers. These deficiencies, that we have being noticing in our universities with the prospective primary teachers (PPT), are our object of study. In this context, this paper describes a survey-type study on the mathematical knowledge required to teach of 737 prospective primary teachers from three universities in Andalusia. Based on the Mathematic Teacher Specialized Knowledge (MTSK), we have carried out a questionnaire addressing items related to fractions, decimals and percentages, contents chosen by its intrinsic transcendence, as by their application to other mathematical contents and other disciplines, in the ambit of primary school. This questionnaire has allowed us to explore the knowledge that these future teachers posses about these contents. The results of the study show an important number of weaknesses, some of them already described in research literature, and also some strengths. In both cases, the obtained information gives a base to explore other teacher training centers, elements of reflection to the academic authorities about the selection process to the access to university and, more concretely, to this training centers, as a starting point to redesign their training programs.

Key words: MTSK, prospective Primary teachers, initial training, professional knowledge, arithmetic.

Introducción

De entre los temas aritméticos de la Educación Primaria, probablemente el que más trascendencia tiene, tanto como contenido en sí como por su aplicación a otros contenidos matemáticos y a otras disciplinas, es el que podríamos englobar como fracciones, decimales y porcentajes. Por ello, el conocimiento matemático de los maestros, en este ámbito, requiere una especial atención respecto a su estructura, sus contenidos y sus relaciones. Se trata de un tema donde es frecuente encontrar, durante la etapa de la educación obligatoria, un tratamiento algorítmico y ligado a procedimientos y donde los estudiantes suelen mostrar importantes lagunas al acabar su formación (PISA; TIMSS).

El acceso a los estudios de Maestro de Primaria en España no tiene requerimientos específicos y, además, no es de los más demandados, por lo que es frecuente que muchos estudiantes universitarios decidan realizar estos estudios sin haber sido su primera opción. Debemos unir a ello que un número importante de candidatos tuvo su último contacto con las matemáticas varios años atrás. Quizás por ello, su desempeño en matemáticas elementales se muestre tan deficiente (Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent, 2012).

Estudios nacionales e internacionales corroboran esta afirmación, en relación con el contenido aritmético elemental y, más concretamente, en el ámbito de las fracciones, los decimales y los porcentajes. Cabe señalar los trabajos de Putt (1995), en el campo de la representación decimal de los números y su ordenación; Post, Harel, Behr y Lesh (1991), en relación con las representaciones decimal y fraccionaria; De Castro, Castro y Segovia (2004) o Zazkis y Campbell (1994), con los decimales menores que uno, las reglas de cálculo con números decimales o ante situaciones de ajuste del valor posicional al realizar estimaciones; o Muñoz-Catalán y

Carrillo (2007), en relación con el uso de métodos formales para la simplificación de fracciones o con el propio concepto de fracción.

Hemos de añadir que en nuestro modelo de conocimiento del profesor este saber matemático ocupa un papel muy relevante, por lo que se hace necesario conocer muy detalladamente el punto de partida antes de iniciar la formación.

Desde esta perspectiva, venimos trabajando en un Proyecto de Innovación Docente de la Universidad de Huelva «Conocimiento para enseñar Matemáticas de los estudiantes para Maestro: análisis de dificultades» (PIE 1101), con el objetivo de determinar las debilidades y fortalezas que muestran los estudiantes para Maestro (EPM) al iniciar su formación y aportar luz sobre posibles causas, de forma que en el proceso formativo pueda iniciarse su reconstrucción a la vez que se aproveche la situación para la construcción de conocimiento matemático especializado.

En una primera fase, hemos abordado un proceso de identificación y análisis de conocimientos matemáticos inadecuadamente construidos, referidos a la matemática de Educación Primaria. Se ha tratado, por tanto, de partir del conocimiento matemático común que tienen los EPM, pero su análisis situará a los formadores en otros dos planos: el del conocimiento de los obstáculos y errores habituales en el ámbito de los temas estudiados y el del conocimiento sobre estrategias de aprendizaje de esos temas, ambos de interés en la formación inicial de maestros.

En este artículo nos centraremos en la identificación de las fortalezas y debilidades del conocimiento matemático relativo a fracciones, decimales y porcentajes de los EPM.

Marco teórico

El conocimiento profesional del profesor es objeto de discusión, teorización y organización de programas en pos de su mejora. En los trabajos seminales de Shulman (1986) se considera la existencia de dos macrocomponentes dentro de este conocimiento: el conocimiento de la materia que se va a explicar y el conocimiento didáctico del contenido; Shulman define siete subdominios en los que se puede organizar el conocimiento del profesor. Esta distinción resulta interesante a la hora de definir programas de formación permanente y de diseñar cursos de formación de futuros profesores, ya que, aunque entendemos que el conocimiento del profesor está integrado, es posible hacer esfuerzos por lograr una caracterización más detallada de cada una de las dos componentes. Tras este trabajo, se han desarrollado varias caracterizaciones del conocimiento del profesor de Matemáticas (Fennema y Franke, 1992; Davis y Simmt, 2006; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009) y, siguiendo la idea de Shulman de separar en las dos macrocomponentes anteriormente citadas, desde el grupo de la Universidad de Míchigan se desarrolló el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, en sus siglas anglófonas, Ball, Thames y Phelps, 2008) no solo como modelo de análisis de conocimiento, sino como referente para el diseño de programas de formación del profesorado. Dentro de esta perspectiva, se definieron tres subdominios para cada una de las macrocomponentes de Shulman. En este documento tienen especial relevancia las relativas al conocimiento de la materia, a saber: conocimiento común del contenido (CCK), conocimiento especializado del contenido (SCK) y conocimiento en el horizonte matemático (HCK). El CCK se caracteriza como el conocimiento de la materia que cualquier usuario de la matemática pudiera requerir en su profesión, incluyendo a profesionales ajenos a la docencia. Así, este conocimiento es el relativo a la matemática teórico-práctica como cuerpo de conocimiento de posible aplicación a otros campos; puede considerarse similar a las matemáticas que se hallan en los libros de texto. El SCK es una de las grandes aportaciones del grupo de Míchigan, ya que reconoce la diferencia del conocimiento matemático que requiere el profesor de Matemáticas del que necesita, por ejemplo, un físico o un investigador en matemáticas. Este conocimiento está definido en el artículo de presentación del modelo a través de las acciones que permiten al profesor: «responder a las preguntas "¿por qué…?" […] o justificar y evaluar algoritmos no convencionales que desarrollen los alumnos» (Ball et ál., 2008, p. 400), entre otras. Finalmente, el HCK, definido como «una orientación hacia y una familiaridad con el conocimiento matemático» (Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013), es el conocimiento que permite al profesor saber cómo funcionan las matemáticas (de ahí la 'familiaridad con'), y tener una mirada prospectiva de los temas matemáticos que considera en el momento de impartir una clase (de ahí la 'orientación hacia'). Sin embargo, este modelo ha suscitado problemas de definición entre los diferentes subdominios (Silverman y

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

Thompson, 2008), lo que ha conducido al grupo de investigación de la Universidad de Huelva a desarrollar un refinamiento del modelo. Este nuevo modelo, denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), parte de la base de que el conocimiento matemático que posee el profesor de Matemáticas es especializado por ser parte del conocimiento que necesita para impartir docencia, independientemente de que en otras profesiones pudiera requerirse. Sin embargo, en el desarrollo de este modelo se considera exclusivamente aquel conocimiento que es específico del profesor de Matemáticas, y se excluyen aquellos conocimientos generales útiles para enseñar, pero distantes de la matemática. Así, se considera que el conocimiento del profesor de Matemáticas, pese a su naturaleza integrada, se puede observar desde una perspectiva analítica, considerando que en la tarea de enseñar el profesor conoce, pone en práctica y reflexiona sobre diferentes objetos, como son, en lo relativo al conocimiento matemático, los conceptos y procedimientos matemáticos, las estructuras matemáticas o la forma de pensar en matemáticas; y, en lo relativo al conocimiento didáctico del contenido, las formas organizar el contenido matemático para su enseñanza, las formas de pensar en los contenidos que poseen los estudiantes o las directrices curriculares. Así, estos seis objetos sobre los que pueden centrarse el conocimiento y la reflexión del profesor dan lugar a seis subdominios.

En primer lugar, describimos aquellos encuadrados en la caracterización de la macrocomponente descrita por Shulman relativa al conocimiento de la materia. El subdominio del conocimiento de los temas (KOT) toma como objeto el contenido matemático y contiene el conocimiento de distintas dimensiones (que organizamos como categorías) asociadas al tema, como son las propiedades y sus fundamentos teóricos, los procedimientos que se realizan con él, la fenomenología (Freudenthal, 1983) y las aplicaciones del contenido a situaciones reales o matemáticas (como diferentes ejemplos donde el tema se manifieste), los distintos significados y definiciones del concepto abordado o las representaciones del contenido. Estas categorías nos permitirán diseñar la estructura del instrumento para obtener información y su posterior análisis.

Entendemos que este conocimiento puede ser compartido con otras profesiones, pero ciertas dimensiones, como los significados del tema, tienen una especial relevancia en la labor del profesor de Matemáticas, y lo convierten en especializado, en tanto en cuanto suponen una herramienta para la realización de la profesión de profesor. El conocimiento de la estructura matemática (KSM), por su parte, tiene que ver con conocer el contexto matemático de un determinado objeto matemático. Así, este conocimiento estructural de las matemáticas permitirá al profesor reflexionar sobre el contenido desde una visión prospectiva, en la que conocimientos avanzados le permitan un tratamiento de la 'matemática elemental desde una perspectiva avanzada', o viceversa, considerar que estos contenidos pueden abordarse desde una matemática más sencilla, respondiendo a la idea de 'matemática avanzada desde una perspectiva elemental'. Estas consideraciones, unidas a la idea de Felix Klein de entender la matemática desde un punto de vista superior, que daría al profesor una visión de conjunto de la construcción de las matemáticas, constituyen este subdominio. Finalmente, el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM) está formado por el conocimiento sobre cómo se construye la matemática. Este consta de elementos generales, como conocer los distintos tipos de demostración o razonamiento en matemáticas, así como la sintaxis, o las nociones de clasificación o generalización; y de elementos ligados a temas, como por ejemplo, la lógica que sustenta la idea de clase, fundamental para considerar fracciones equivalentes. Estos tres subdominios constituyen, desde esta nueva perspectiva, el contenido de lo que en términos de Shulman sería conocimiento de la materia y que en este caso, dada la contextualización matemática del profesor que se considera, denominaremos 'conocimiento de las matemáticas'.

Dentro del dominio del conocimiento didáctico del contenido (la otra macrocomponente de Shulman), si nos centramos en las formas de organizar el contenido matemático para su enseñanza, surge el subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), constituido por el conocimiento del profesor de distintas estrategias, materiales, recursos, o ayudas que le permitan organizar los contenidos matemáticos de una forma adecuada a sus intereses. Incluimos en este subdominio el conocimiento sobre teorías de enseñanza, como el conocimiento de las características de la resolución de problemas como estrategia metodológica en la enseñanza de las matemáticas. De igual forma, si enfocamos ahora el conocimiento del profesor sobre el alumno como aprendiz, surge el subdominio conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), donde se incluye el conocimiento que posee el profesor acerca de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos, las concepciones e ideas previas acerca de

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

conceptos, el lenguaje y vocabulario que suelen usar los estudiantes al trabajar ciertos conceptos o el conocimiento de pautas de cómo se produce el aprendizaje del contenido abordado. Incluimos también en este subdominio el conocimiento de teorías de aprendizaje como APOS. En tercer lugar, partiendo de las orientaciones curriculares, surge el subdominio del conocimiento de los estándares de aprendizaje *en matemáticas* (KMLS), que contiene las guías que puede tener en cuenta el profesor a la hora de secuenciar los contenidos, como la literatura de investigación, documentos de asociaciones profesionales (por ejemplo, NCTM) o, por supuesto, el currículo oficial del país en el que imparte docencia.

Método

Dado que nuestro interés es la identificación de fortalezas y debilidades del conocimiento matemático relativo a fracciones, decimales y porcentajes en los EPM, decidimos utilizar una metodología tipo *survey* (Colás y Buendía, 1998), diseñando un cuestionario de respuesta cerrada. El análisis de la información obtenida se realizó inicialmente con un estudio de frecuencias al que siguió una interpretación, relativa a cinco categorías del conocimiento del tema fracciones, decimales y porcentajes[2]: fenómenos y aplicaciones, significados y definiciones (incluyendo imágenes de los conceptos), propiedades y su fundamentación, representaciones y procedimientos.

Nuestra situación como formadores de maestros en los tres centros universitarios participantes nos ha permitido acceder a 737 estudiantes para Maestro (de los aproximadamente 1.500 que hay) entre la Universidad de Huelva, el CES Cardenal Spínola CEU de Sevilla y la Universidad de Sevilla. De estos, ninguno había recibido previamente formación en didáctica de la matemática relativa a los temas aritméticos en el grado, por lo que su formación previa consiste en los cursos recibidos desde la Primaria hasta el último año de Secundaria en ciertos casos, o hasta segundo de Bachillerato, dependiendo de la opción escogida en este.

(2) Aceptamos que otros criterios de organización son posibles. Usamos este por ser el que se ajusta a nuestro marco teórico.

El cuestionario como instrumento de recogida de información

Elaboramos un cuestionario piloto que fue probado en un grupo de 52 estudiantes de 2.º de grado en Educación Primaria del CES Cardenal Spínola CEU de Sevilla, lo que permitió refinar la herramienta de obtención de información. Las preguntas seleccionadas emanan de los trabajos de Dickson, Brown y Gibson (1991); Hill, Schilling y Ball (2004); Ball (1990*a,* 1990*b*); Hernández, Noda, Palarea y Socas (2003); Contreras, et ál. (2012); y de la propia iniciativa de los profesores de la materia involucrados en el proyecto, considerando errores comúnmente observados en años previos.

Teniendo en cuenta tanto su resultado como los tiempos previstos y reales usados para responderlo, se terminó de perfilar el cuestionario definitivo, compuesto por 17 cuestiones, de respuesta cerrada, con cuatro opciones de respuesta y una sola correcta. Además, dentro de las tres opciones incorrectas, hay una 'respuesta esperada', que proviene de resultados de la literatura citada anteriormente.

Las cuestiones 4 y 8 abordaron los descuentos como aplicaciones de los porcentajes, y la 1 y la 13 los significados de las fracciones (como parte todo), entendidas como fenomenología. Asimismo, las cuestiones 1, 11, 13, 15 y 16 requieren el conocimiento sobre las definiciones de fracción (y papel de la unidad), fracción impropia, número racional, número decimal y sentido del valor posicional. En cuanto a las propiedades y sus fundamentos, las preguntas 3, 9, 10, 16 y 17 abordan la densidad de los racionales, la jerarquía de operaciones y la naturaleza de la ordenación en números racionales (con énfasis en los negativos). En cuanto a la categoría de representaciones y su interpretación, todas las preguntas requieren que se comprenda la expresión en diferentes registros de los racionales o decimales irracionales (incluyendo porcentajes); a esto se dirigen especialmente las preguntas 1, 12, 13, 15 y 16. Finalmente, en cuanto a la categoría basada en procedimientos, las preguntas 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14 y 17 implican la ordenación de decimales y fracciones, las operaciones con fracciones, y las operaciones con decimales (incluyendo operaciones elementales, cambios de registro).

Los estudiantes recibieron instrucciones para la realización del cuestionario, consistentes en no usar la calculadora.

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas acerca de fracciones, números decimales y porcentajes como soporte del cuestionario

El conocimiento especializado de un profesor de Matemáticas, en particular el relativo al contenido que trabaja, no solamente tiene sentido por su valor matemático, sino que aporta a la práctica docente herramientas con las que organizar, dar sentido y comunicar el contenido. Ma (1999) afirma que la falta de conocimiento del contenido (en su caso, de la división de fracciones) genera una dificultad a la hora de crear representaciones útiles en la enseñanza y que «ni el conocimiento pedagógico puede compensar su ignorancia del concepto» (p. 89). Así pues, relacionaremos el conocimiento requerido con los diferentes subdominios planteados en el modelo MTSK.

Respecto al conocimiento de los temas (KOT), nos interesa averiguar el significado que los EPM otorgan a las fracciones (por ejemplo, parte-todo), particularmente a las impropias, como parte de su fenomenología, así como su conocimiento acerca de sus definiciones, representaciones y la ordenación y las operaciones con fracciones, decimales y porcentajes (asociado a la categoría 'procedimientos'). Entendiendo cada uno de estos tres elementos como un tipo de representación del número racional, nos interesa analizar si los EPM son capaces de pasar de uno a otro conservando el valor numérico y el significado que le atribuyen al propio valor (Llinares y Sánchez, 1988), ordenando números racionales y teniendo en cuenta en todo esto la propiedad de densidad de los números racionales. Ligado a lo anterior, se encuentra el concepto de número racional, que asociamos al conocimiento de la definición de dicho número. De igual forma, se aborda la ubicación de racionales en la recta real, añadiendo a las dificultades de identificación y situación de los números decimales la casuística de los números decimales negativos. Otro punto sobre el que se cuestiona es el del porcentaje, en situaciones propias de aplicaciones fenomenológicas (en contextos como los descuentos), no solo en cuanto al cálculo directo del porcentaje de un número, sino también en cuanto a la forma de revertir el proceso de 'hacer un descuento porcentual', así como la forma de encadenar dos porcentajes en uno solo, cuestión íntimamente relacionada con el significado del producto de fracciones, a lo que añadiremos otros procedimientos como la suma de fracciones y la obtención de fracciones equivalentes, y la jerarquía de operaciones. Un elemento que entendemos que debe formar parte fundamental del KOT de los estudiantes para Maestro es el sistema de numeración decimal (SND), en el que se profundiza a través de cuestiones sobre sus propiedades y fundamentos, que abordan la problemática relacionada con la posicionalidad y el significado de cada uno de los elementos.

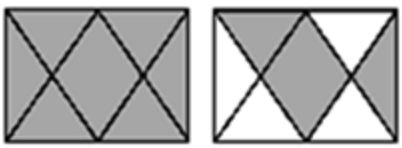
Asimismo, nos interesa el conocimiento sobre la relación entre las fracciones y el área de una figura a través de la identificación de fracciones en modelos de representación de área como partes del total, así como su conocimiento de la estructura matemática (KSM), al trabajar con cantidades genéricas, expresadas en forma de incógnita o variable. También nos interesa su conocimiento de la práctica matemática (KPM) vinculado a inducir la necesidad de generalizar un procedimiento. Sin embargo, aunque creemos que estos aspectos del conocimiento que pudiera tener un EPM son fundamentales en el desarrollo de su práctica, no fueron objeto de especial atención durante el desarrollo del cuestionario; fue en el análisis *a posteriori* de este cuando entendimos que podían ponerse en juego al responder a algunas preguntas, dada la naturaleza de estas. Por esa razón, el cuestionario que justificaremos a continuación está enfocado principalmente en la indagación del KOT relativo a fracciones, decimales y porcentajes (en lo relativo a los elementos resaltados en los dos párrafos anteriores), buscando tanto las debilidades como las fortalezas del conocimiento de los futuros maestros.

A continuación, presentamos las preguntas del cuestionario y la información que deseamos que nos proporcione acerca del KOT de los EPM.

FIGURA I. Pregunta 1 del cuestionario

Si las partes sombreadas del siguiente dibujo representan la parte que nos hemos comido de dos tabletas de chocolate y la no sombreada la que no nos hemos comido, indica cuál de las siguienets opciones representa lo que nos hemos comido.

a) 10/14 de tableta
b) 12/16 de tableta
c) 6/8 de tableta
d) 6/4 de tableta



Esta pregunta está basada en el problema número 5 planteado por Hill et ál. (2004), con el que pretendían calibrar la concepción que los sujetos

Revista de Educación, 367. Enero-marzo 2015, pp. 36-62
Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

poseen sobre la unidad, centrando la atención en la fracción impropia. Llinares (2003) anota que la idea de unidad aparece cuando debemos reconstruirla dada la representación de la parte.

Su resolución requiere la toma de conciencia de que hay dos unidades y de que el resultado es mayor que la unidad: el hecho de que cada una de las opciones mencione «de la tableta» debería dejar claro que esa es la unidad. Eso permite descartar las soluciones *a, b, c* y comprobar la *d* como posible, para lo que basta con ver que cada tableta se compone de ocho triángulos congruentes y que la segunda tiene la mitad sombreada. Es también preciso conocer la equivalencia de fracciones y saber descomponer 6/4 como 1 (4/4) más 4/8, e, incluso, el número mixto: 1 4/8.

De entre las alternativas erróneas, las más esperadas son 12/16 y 6/8, ya que en ambas se obvia la idea de fracción impropia. La opción 10/14 implica dificultades en la identificación de una unidad de medida para calcular la parte sombreada.

FIGURA II. Pregunta 3 del cuestionario

3. Selecciona la respuesta correcta:

a) La letra A equivale al número -1,9
b) La letra A equivale al número -2,04
c) La letra A equivale al número -2,1
d) La letra A equivale al número -2,15

Esta pregunta se plantea desde Castro (2001), quien comenta que la comparación de números decimales resulta problemática porque se tiende a considerar la parte decimal como un número natural. Además, dicha pregunta supone también la dificultad de añadir la parte negativa de la recta real, concepto que ampliamos desde la afirmación de González Marí (2001), quien, refiriéndose a los enteros, asevera que las nociones asociadas a los números negativos no son fáciles de comprender, aunque estos se encuentren en situaciones cotidianas. En esta cuestión se requiere identificar A como número negativo menor que –2 y que cada división entre unidades es una décima, además de la comprensión del orden de números decimales y negativos, para ubicar A entre –2 y –2,1. Por otro lado, Castro y Torralbo (2001) indican que este tipo de representación de los números racionales en la recta real genera dudas cuando aparecen varios números.

La opción *a* refleja no advertir que A es menor que –2 (o lo que es lo mismo, pensar que $-1{,}9 < -2$) y las opciones *c* y *d* pueden implicar no haber tomado conciencia de la división en décimas que ofrece el dibujo. Los tres casos conllevan dificultades en la ordenación de números decimales negativos.

FIGURA III. Pregunta 4 del cuestionario

4. Si he pagado 12.710 € por un vehículo de segunda mano, ¿cuál era su precio de fábrica si su anterior dueño me lo vendió con un 18% de descuento?

a) La letra A equivale al número -1,9
b) La letra A equivale al número -2,04
c) La letra A equivale al número -2,1
d) La letra A equivale al número -2,15

Esta pregunta se apoya en la afirmación de Dickson et ál. (1991, p. 323) sobre la «evidente importancia que reviste la comprensión de los porcentajes en la vida cotidiana y en las actividades comerciales».

En esta cuestión es preciso reconocer el hecho de que no tenemos el precio inicial, pero que, si hemos tenido un descuento del 18%, el precio que hemos pagado es el 82% de la cantidad inicial. Contreras et ál. (2012) han comprobado en su reciente estudio que el error más frecuente estaba relacionado con la aplicación del porcentaje mostrado sobre la cantidad que ya tenía el descuento aplicado, sumándolo a él, o asumiendo que el precio final supone el porcentaje de descuento de la cantidad inicial.

Resolver la proporcionalidad anterior (que es, de alguna manera, la situación inversa de aplicar un descuento) requiere un manejo de las operaciones básicas con números racionales. La opción *c* es la más esperada de entre las incorrectas y supone la idea de que 'deshacer' el descuento es como aplicar el porcentaje al precio final y sumarlo a él, error que resulta muy común (Ariza, Sánchez y Trigueros, 2011).

FIGURA IV. Pregunta 5 del cuestionario

5. Selecciona la opción correcta que corresponde al resultado final de la siguiente serie de operaciones:

$200 \xrightarrow{75\%} \boxed{} \xrightarrow{6/10} \boxed{} \xrightarrow{90\%} \boxed{} \xrightarrow{:0,3} \boxed{}$

a) 2700
b) 2,70
c) 27
d) 270

Esta cuestión supone el manejo de las distintas expresiones de un número racional, sus equivalencias y las operaciones con ellas (Llinares y Sánchez, 1988), y probablemente de la estimación, ya que los cálculos se realizaron sin calculadora. Es previsible que la mayor dificultad esté en la última división, pues suele haber dificultades en comprender que al dividir se pueda obtener un número mayor que el dividendo; asimismo, si efectúan la división transformando el número decimal en una fracción, de nuevo surgen dificultades, ya que, como aseveran Ball (1990*b*) y Ma (1999), el algoritmo de la división por una fracción es conocido por la mayoría, pero no lo es el fundamento matemático que lo sustenta.

FIGURA V. Pregunta 8 del cuestionario

8. Si una mercancía sale a la venta con un descuento sobre su precio de fabricación ***X*** y, sobre ese precio, el vendedor hace un nuevo descuento, lo que paga el cliente se obtiene:

a) Aplicando al valor inicial ***X*** la suma de ambos descuentos
b) Aplicando al valor inicial ***X*** el producto de los dos descuentos
c) Aplicando solo el segundo descuento sobre el valor inicial ***X***
d) Ninguna de las anteriores es correcta

Al igual que en la pregunta número 4, de nuevo estamos ante una aplicación no directa de porcentajes, cuya esencia es la identificación correcta de los valores sobre los que, en cada caso, han de aplicarse aquellos (Contreras et ál., 2012). Busca identificar un error extendido en la aplicación de porcentajes consecutivos; la tendencia natural es sumar ambos porcentajes para obtener la cifra final. Queremos comprobar también si son capaces de interpretar tales porcentajes como fracciones:

en tal caso debería resultar inmediata la identificación de la solución con el producto de ambos.

FIGURA VI. Pregunta 9 del cuestionario

9. Indica la opción correcta:

a) Entre 0,21 y 0,22 no hay ningún número decimal
b) Entre 0,21 y 0,22 hay más de 10 números decimales
c) Entre 0,21 y 0,22 hay exactamente 10 números decimales
d) Entre 0,21 y 0,22 hay exactamente 9 números decimales

FIGURA VII. Pregunta 10 del cuestionario

10. Entre 3/7 y 4/7:

a) No hay ningina fracción
b) No se puede saber si hay fracciones o no
c) Hay una cantidad infinita de fracciones
d) Hay un cantidad finita de fracciones

Basándonos en Ruiz y Castro (2011), en estas dos cuestiones (9 y 10) queremos identificar el conocimiento sobre el proceso que nos permite encontrar un número racional entre dos dados, determinando como error principal la idea de un siguiente en Z (opción *a*); en la número 9 esto se plantea en formato decimal.

La pregunta 10 pretende identificar el conocimiento que permite ubicar una fracción entre otras dos dadas, más allá de la mera comparación entre numeradores (opción *a*), a través de fracciones equivalentes o previo paso a las expresiones decimales de las fracciones dadas. También, como en la cuestión anterior, podremos explorar la idea errónea que sitúa solo un número finito de fracciones entre dos dadas, obviando la densidad de los números racionales (Pehkonen, Hannula, Maijala y Soro, 2006); en este caso, incluso, podemos esperar porcentajes de error superiores a los de la pregunta número 9, pues la representación a través de cocientes entre números enteros de los números racionales acentúa esta confusión.

La opción *a* responde a la idea intuitiva de que entre dos fracciones de igual denominador y numeradores consecutivos (en Z) no se pueden generar más fracciones. La opción *b* supone un distractor, basado en la

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

duda que pudiera generar el conflicto entre la idea intuitiva que nos guiaría hacia la opción *a* y la intuición de las propiedades de densidad de los números racionales. Las opciones *c* y *d* nos informan de la capacidad de los EPM para generalizar el proceso de generación de fracciones entre dos dadas, quedándose en una cantidad limitada (opción *d*) o en una cantidad infinita (opción correcta, *c*).

FIGURA VIII. Pregunta 11 del cuestionario

11. Un número que se encuentra a tres milésimas de 2,347 es:

   a) 2,344
   b) 2,647
   c) 2,317
   d) Ninguna es correcta

Se aborda la comprensión del SND (ideas básicas, Ma, 1999), pero esta vez a través del concepto de distancia, que esperamos que sea interpretado como una sustracción (opción *a*), habiéndose elegido esta en vez de la suma por ser menos evidente. Las opciones incorrectas están generadas para evidenciar el desconocimiento del valor posicional de la milésima, que puede confundirse con décima o centésima. Konic, Godino y Rivas (2010) señalan que, siendo el concepto de valor posicional un componente esencial del currículo en Primaria, forma parte de las dificultades comúnmente detectadas en el aprendizaje de los números decimales.

FIGURA IX. Pregunta 12 del cuestionario

12. Indica cuál o cuáles de las siguientes representaciones equivalen a 1,75:

   a) 15/10x5/10
   b) 100x0,75
   c) 3/4+100/25
   d) 12/8+50/200

Como Muñoz-Catalán y Carrillo (2007), pretendemos analizar, aunque con un planteamiento diferente, la capacidad de estimar y operar con fracciones y decimales de forma combinada sin el uso de calculadora, a través de un pensamiento flexible de las estructuras subyacentes, lo que supone un dominio de las equivalencias entre distintas expresiones de un número racional. Algunas opciones deberían descartarse por estimación, como c, en la que aparece una fracción equivalente a cuatro sumada a un número positivo.

FIGURA X. Pregunta 13 del cuestionario

13. Señala la representación gráfica equivalente a la fracción 7/8:

a) 

b) 

c) a y b son correctas
d) Ninguna es correcta

Al igual que en la primera cuestión se analizaba la fracción impropia, en esta se aborda el concepto de fracción propia, pero en este caso se proporciona como dato la expresión numérica y se busca la correcta identificación de su representación icónica, señalando como error esperado la opción *c,* lo que, además, informará de nuevo sobre el concepto de fracción impropia.

FIGURA XI. Pregunta 14 del cuestionario

14. Indica qué porcentaje es equivalente a 2/10:

a) 2%
b) 20%
c) 0,2%
d) 0,02%

Esta cuestión requiere la simple identificación de la equivalencia entre las expresiones decimal y en forma de porcentaje de un número; el error esperado es la opción *c* al ser la expresión decimal de 2/10. Pretendemos profundizar con esta pregunta en la habitual dificultad de los alumnos para relacionar una fracción con un porcentaje, algo que Dickson et ál*.* (1991)

mencionan como una de las debilidades detectadas en algunos estudios realizados al respecto. Añadimos la posible aparición de dificultades con el SND en cuanto a la posición de la coma al dividir entre 10 y, posteriormente, pasar a porcentaje.

FIGURA XII. Pregunta 15 del cuestionario

15. En 1,237 hay:

a) 23 décimas
b) 12 décimas
c) 237 décimas
d) Solo hay 2 décimas

Al igual que en la cuestión undécima, se aborda la comprensión del SND, esta vez con expresiones decimales, dotando de significado a cada uno de los términos y profundizando en la comprensión del valor posicional de los elementos relativos a la parte no entera.

Konic et ál. (2010) destacan que el modo en el cual se expresan ciertos problemas planteados en los libros de Primaria al respecto puede llevar a no considerar la relación entre la posición que ocupa una cifra y el valor asignado; en nuestro caso, la respuesta esperada es *d solo hay dos décimas,* haciéndonos eco de esta situación de conocimiento habitualmente mal construido.

FIGURA XIII. Pregunta 16 del cuestionario

16. Selecciona la opción correcta:

a) $1{,}23 < 1{,}23\hat{2} < 1{,}\widehat{23} < 1{,}2\hat{3}$
b) $1{,}2\hat{3} < 1{,}23\hat{2} < 1{,}\widehat{23} < 1{,}23$
c) $1{,}23 < 1{,}2\widehat{32} < 1{,}23\hat{2} < 1{,}2\hat{3}$
d) Ninguna respuesta es correcta

Esta cuestión requiere comprender correctamente la ordenación de números en sus expresiones decimales y, subyacente a esta ordenación, comprender el significado de la periodicidad de una cantidad. Asimismo, comprender la ordenación mediante la comparación del valor posicional también requiere que se comprenda el significado de dicha posicionalidad.

FIGURA XIV. Pregunta 17 del cuestionario

17. Selecciona el resultado de la siguiente operación:

2/10-[1/4+3/2+(-8-1/5)]=

a) 133/20
b) 1197/180
c) 117/20
d) a y b son correctos

Finalmente, esta cuestión pretende valorar la capacidad de operar con fracciones, ciñéndonos en este caso a su suma y resta, así como la jerarquía de las operaciones y la equivalencia de fracciones, ya que el resultado correcto requiere identificar todas las soluciones posibles, en este caso, las fracciones equivalentes.

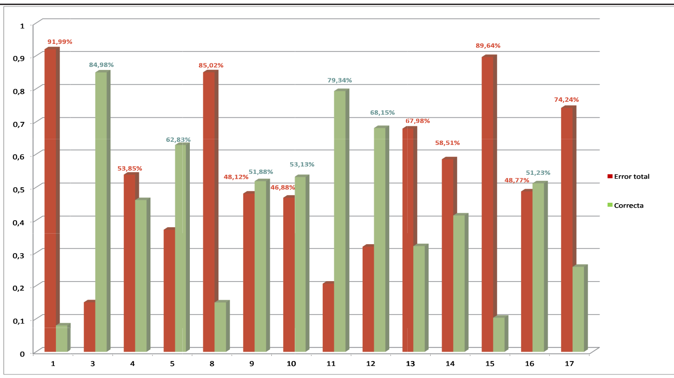
Resultados y conclusiones

El Gráfico I muestra la distribución de porcentajes en cada una de las cuestiones atendiendo a la respuesta correcta y el error acumulado.

Las cuestiones 1 y 13 (significado y representación de fracciones, fracciones impropias), 8 y 14 (porcentajes como aplicación y operador), 15 (significados en el SND) y 17 (aspectos procedimentales relativos a las fracciones) son las que presentan menor porcentaje de respuestas correctas; en la cuestión 4 (aplicación de porcentajes) también el error acumulado supera el valor de respuestas correctas. Por otro lado, en las cuestiones 3 (propiedades y significados de decimales negativos), 5 (operaciones combinadas), 11 (significado de distancia como sustracción en el SND) y 12 (representación y operaciones con fracciones), el porcentaje de respuesta correcta es significativamente elevado, mientras que en las cuestiones 9 y 10 (encontrar un racional entre dos dados, en sus expresiones decimal y fraccionaria) y 16 (representación de decimales), aunque el índice de respuestas correctas supera al total de errores, los valores se muestran muy cercanos.

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

GRÁFICO I. Distribución de porcentajes de respuestas correctas y error acumulado



El tratamiento de las fracciones impropias es menos frecuente que el de las fracciones propias en la educación obligatoria, por ello, el bajo resultado de las cuestiones 1 y 13 era esperado: puesto que la interpretación de fracción como partes de un todo es la más fácilmente comprensible (Castro y Torralbo, 2001), se tiende a presentarlas así en el medio escolar; si no se trabaja correctamente el concepto de unidad, puede generarse una errónea construcción del concepto fracción cuando las partes superan la unidad.

Por otro lado, Dickson et ál. (1991) ya mencionan otros estudios relativos a esta cuestión en los que quedaba de manifiesto la no comprensión de la fracción impropia al ser representada mediante subáreas de una unidad de superficie. Los mismos autores presentan como ejemplo la suma de dos fracciones propias que da lugar a una fracción impropia y mencionan la confusión que se genera ante una mala adquisición del concepto unidad al reinterpretarla en el resultado.

El significado de fracción, que puede estar asociado a contextos de partes de un todo (continuo o discreto), operador, razón o cociente (de dos enteros), se trata frecuentemente en Primaria desde la primera de las perspectivas y utilizando modelos de partes de una sola unidad. El cuarto contexto, que proporciona de manera natural la idea de fracción impropia y que está asociado a un significado de la fracción que los estudiantes de Educación Primaria han trabajado previamente (división partitiva), no suele relacionarse con el de partes de un todo. Además es el que más se acerca a la definición formal de fracción. Precisamente, obviar esta definición suele conducir a algunos EPM a identificar 3,5/7 como respuesta a la décima cuestión.

De la misma forma, utilizar los porcentajes más allá de la mera aplicación a un valor concreto, como es el caso de las cuestiones 8 y 14, suele resultar complejo. En la primera de ellas esperábamos el resultado obtenido, pues suele ser parte del elenco de errores con que nos solemos encontrar en las aulas de formación inicial de maestros. El carácter consecutivo de los descuentos lleva a identificar la suma como operación que conduce al resultado, de la misma forma que para averiguar el precio inicial, conocido el precio con descuento, los EPM aplican el porcentaje de descuento al precio final y se lo suman a ese valor (apartado *c* de la cuestión cuarta). En las cuestiones 4 y 8 emerge, de distinta forma, la necesidad de identificar el valor sobre el que aplicar el porcentaje, que es un paso conceptualmente más complejo que el hecho simple de aplicar un porcentaje a un valor determinado (que se podría identificar con la fracción como operador); por su parte, en la cuestión 14, precisamente la ausencia de ese valor sobre el que operar es lo que suele conducir a error (Contreras et ál., 2012). Si la pregunta se hubiera planteado como «¿Qué porcentaje de A (determinado) se corresponde con 2/10 de ese valor?», los resultados se hubieran correspondido con los obtenidos en la quinta cuestión.

Por otro lado, nombrar o reconocer expresiones decimales en representaciones no convencionales es una dificultad evidenciada en otros estudios (Ball, 1990*a*). En la Educación Primaria se suele hacer poco hincapié en el sistema de numeración decimal, cuyo conocimiento tiene importantes implicaciones en todos los aspectos de la Educación Primaria como para ser considerado conocimiento transversal; es más, Kamii (1994) indica que el aprendizaje de los algoritmos aritméticos sin una comprensión conceptual significativa previa del número genera un círculo vicioso, pues «'malenseña' el valor de posición e impide el correcto desarrollo del concepto del número» (p. 49), cuando el valor de posición de nuestro sistema de numeración es fundamental para un profundo conocimiento del mismo que, posteriormente, permita utilizarlo correctamente. El conocimiento con sentido de su estructura implica mucho más que identificar el papel de las unidades de cada orden. La cuestión 15 aborda un aspecto particular de esta comprensión: la relacionada con la lectura y escritura de los números enfatizando un orden de unidad cualquiera. En esta cuestión la dificultad no está en reconocer

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

que el número está compuesto por una unidad, dos décimas, tres centésimas y siete milésimas, sino en hacer diferentes lecturas de esa cantidad, conjugando décimas y centésimas, conociendo la definición de número decimal y sentido de las unidades. Otro aspecto que incluye esa comprensión con sentido del SND es el que se aborda en la cuestión 11 (significado de la distancia entre dos números racionales), pero en este caso la resolución pasa por sumar o restar tres milésimas al valor dado, de ahí la diferencia de resultados entre ambas.

Es destacable, asimismo, la proximidad entre la frecuencia de acierto y error en las preguntas 9 y 10, ambas diseñadas para el estudio de la comprensión de la densidad de los números racionales: este hecho, independientemente de la representación del número racional como decimal o como fracción, no suele ser una idea correctamente construida en los EPM (Ruiz y Castro, 2011).

La cuestión 17, como ya se ha señalado, no requiere solo operar con fracciones, sino también la jerarquía y el uso de fracciones equivalentes o una utilización del algoritmo y el consiguiente dominio del cálculo del mínimo común múltiplo. La conjunción de todos estos aspectos determina la dificultad con la que parecen encontrarse los EPM, reflejada en el resultado del cuestionario.

Analizando ahora los elementos del KOT mencionados en el apartado 4, consideramos que tanto la definición como el significado que los EPM otorgan a las fracciones, impropias y propias (preguntas 1 y 13), así como su conocimiento acerca de las representaciones y los procedimientos que se pueden desarrollar usando fracciones, decimales y porcentajes, en todos los aspectos tratados (preguntas 14, 15, 4, 8) forman parte de las debilidades de los EPM estudiados; igualmente, la obtención de fracciones equivalentes y la jerarquía de operaciones (pregunta 17) son debilidades destacables. También el sistema de numeración decimal (SND), parece formar parte también de las dificultades, pues, aunque la pregunta número 11 en la que se trata el significado de la distancia a la que se encuentran dos números decimales tiene un acierto considerable, las preguntas 14 y 15, que inciden más profundamente en la estructura del SND, cosechan un error muy importante.

En cuanto a la densidad de los números racionales y su orden, aunque el porcentaje de respuestas correctas de las cuestiones correspondientes (9, 10 y 16) supera al del error acumulado en cada una de ellas, es tan escasa la diferencia que nos inclinamos a pensar que son también muestra de debilidades solo superadas mínimamente por el posible conocimiento procedimental asociado, lo cual muestra una debilidad en el conocimiento de las propiedades y fundamentos de los números racionales en cuando a su densidad.

Del lado de las fortalezas, por tanto, solo es razonable situar la capacidad de ubicar un número decimal en la recta (pregunta 3), incluso siendo este un numero negativo, que es lo que establece la mayor dificultad de la cuestión y lo que hace el hallazgo más destacable; debemos unir a esta el uso de los algoritmos como el producto y la suma (entendida en el sentido amplio) de fracciones, lo que incluye la interpretación de la distancia entre dos expresiones decimales como una sustracción, y la estimación y operación con dos expresiones fraccionarias y/o decimales (preguntas 11 y 12), que son objeto de aprendizaje ampliamente a lo largo de la Primaria y del primer ciclo de la Secundaria.

Reflexión final

Para finalizar, nos gustaría que este estudio pudiera contribuir a la reflexión de los distintos actores implicados en el sistema educativo con capacidad en la toma de decisiones. En primer lugar, esto nos debe ayudar a comprender mejor qué y cómo trabajar determinados aspectos relacionados con las fracciones, los decimales y los porcentajes en la Educación Primaria. En segundo lugar, las autoridades educativas deberían definir con más precisión los conocimientos matemáticos previos exigibles a un estudiante para Maestro, puesto que la universidad no parece el lugar más adecuado para volver sobre conocimientos que deberían haberse superado con anterioridad.

Queremos llamar la atención asimismo sobre el marco teórico sobre el que se apoya nuestro estudio. Aunque nos hemos centrado en el conocimiento de los temas matemáticos (KOT), también han aflorado conocimientos relacionados con la estructura matemática (KSM) y con la práctica matemática (KPM), que conforman las tres componentes del conocimiento matemático del profesor de Matemáticas (MK), íntimamente relacionado con las cuatro propiedades que plantea Ma (1999) como caracterizadoras de lo que llama ‘comprensión profunda de la matemática

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

fundamental' por parte del maestro: ideas básicas (simples y poderosas), relacionadas con el KOT y el KSM que les permitirán guiar a sus futuros alumnos a «realizar una verdadera actividad matemática» (Ma, 1999, p. 148); conectividad, en cuanto a las conexiones entre los conceptos y los procedimientos (KOT y KSM); múltiples perspectivas de una misma realidad o aproximación a la solución de un problema (KOT); y coherencia longitudinal, relacionada con el conocimiento curricular. Los subdominios de nuestro marco teórico, y particularmente las categorías del KOT analizadas en este estudio, conforman una estructura fundamentada de lo que debería abordarse en la formación inicial de los maestros. Para que esto pueda hacerse, es imprescindible partir de un conocimiento matemático, sólidamente construido que permita abordar con garantías, tanto las componentes del conocimiento didáctico del contenido, como profundizar en el conocimiento matemático especializado que requiere un maestro para realizar una buena práctica docente. Una posibilidad de conseguir un mayor nivel de conocimiento matemático en el momento de comenzar la formación inicial, que está en este momento en discusión (Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió, 2014), es la realización de pruebas específicas para el acceso a esta formación.

Referencias bibliográficas

Ariza, A. Sánchez, A. y Trigueros, R. (2011). *Matemáticas específicas para maestros.* Sevilla: Ediciones Copiarte.

Ball, D. L. (1990*a*). I Haven't Done these since High School: Prospective Teachers' Understanding of Mathematics. En M. Behr, C. Lacampagne y M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th PME-NA,* 268-274. DeKalb (Illinois): PME, NA.

— (1990*b*). Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21 (2), 132-144.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education,* 59 (5), 389-407.

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codés, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII,* 227-236. Salamanca: SEIEM.

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* 315-345. Madrid: Síntesis.

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* 285-314. Madrid: Síntesis.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. *Actas del 8.º CERME.* Febrero. Antalya, Turquía.

Colás, M. P. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa.* Sevilla: Ediciones Alfar.

Contreras, L. C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M. C. y Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para Maestro. *Bolema,* 26 (42*b*), 433-458.

Davis, B. y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching. *Educational Studies in Mathematics,* 61 (3), 293-319.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Actas del VIII simposio de la SEIEM.* La Coruña: SEIEM.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: MEC, Labor.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and Its Impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 147-164. Reston (Virginia): NCTM.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht (Países Bajos): Reidel.

González Marí, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* 257-284. Madrid: Síntesis.

Hernández, J., Noda, M. A., Palarea, M. M. y Socas, M. M. (2003). *Habilidades básicas en matemáticas de alumnos que inician los estudios de Magisterio* (preprint). Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna, La Laguna, España.

Hill, H. C., Schilling, S. G. y Ball, D. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *Elementary School Journal,* 105, 11-30.

Jakobsen, A., Thames, M. H. y Ribeiro, C. M. (2012). Delineating Issues related to Horizon Content Knowledge for Mathematic Teaching. *Actas del 8.º congreso del CERME.* Febrero. Antalya, Turquía.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

Konic, P. M., Godino, J. D. y Rivas, M. A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números,* 74, 57-74.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas,* 187-220. Madrid: Pearson Educación.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Mahwah (Nueva Jersey): Lawence Erlbaum.

Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación Matemática,* 19 (1), 5-26.

Pehkonen, E., Hannula, M., Maijala, H. y Soro, R. (2006). Infinity of Numbers: How Students Understand it. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th PME Conference* (vol. 4), 345-352. Praga: PME.

Post, T., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate Teachers' Knowledge of Rational Number Concepts. En E. Fennema , T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds.), *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics,* 177-198. Nueva York: SUNY Press.

Putt, I. J. (1995). Preservice Teachers Ordering of Decimal Numbers: When More is Smaller and Less is Larger! *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 17 (3), 1-15.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching.* Londres: Sage.

Ruiz, J. F. y Castro, E. (2011). Decimales. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria,* 219-244. Madrid: Ediciones Pirámide.

Shulman, L. S. (1986). Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher,* 15 (2), 4-14.

Silverman, J. y Thompson, P. W. (2008). Toward a Framework for the Development of Mathematical Knowledge for Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 11, 499-511.

Tirosh, D. y Graeber, A. (1990). Evoking Cognitive Conflict to Explore Preservice Teacher's Thinking about Division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21 (2), 98-108.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1994). Divisibility and Division: Procedural Attachments and Conceptual Understanding. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of 18th PME,* 423-430. Lisboa: PME.

Dirección de contacto: Miguel Ángel Montes. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Universidad de Huelva. Campus El Carmen. Avda. del 3 de marzo, s/n; 21071, Huelva. E-mail: miguel.montes@ddcc.uhu.es

Fecha de entrada: 30-10-2013 Fecha de aceptación: 24-10-2014