OBJETOS PERSONALES MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS DEL PROFESORADO Y CAMBIO INSTITUCIONAL. EL CASO DE LA CONTEXTUALIZACIÓN DE FUNCIONES EN UNA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES

VICENÇ FONT MOLL*
ANA BEATRIZ RAMOS**

RESUMEN. En este artículo, presentamos la primera parte de la investigación que estamos realizando sobre el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor en la modificación del significado pretendido para un objeto matemático en una institución escolar, ya que ésta tiene la autonomía necesaria para modificar dicho significado. Esta investigación es un estudio de caso en el que nos interesamos, en concreto, por el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura «Introducción a la Matemática», que se imparte en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de Venezuela.

ABSTRACT. This article deals with the first part of the research project that is being carried out on the role played by teacher's personal mathematical and didactic objects in the modification of the meaning presumed for a mathematical object in an educational establishment, since the latter has the necessary autonomy to modify such meaning. This research project is a case study with a particular interest on the role played by teachers' personal mathematical and didactic objects in the introduction of contextualized situations in the teaching-learning process of functions within the subject: «Introduction to Mathematics», which is taught at a Faculty of Economic and Social Sciences in Venezuela.

(*) Universidad de Barcelona.
(**) Universidad de Carabobo.

Revista de Educación, núm. 338 (2005), pp. 309-345
Fecha de entrada: 25-09-2003 Fecha de aceptación: 01-12-2003

MARCO TEÓRICO

TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

Esta investigación se enmarca en la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS a partir de ahora). En diferentes trabajos, Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran *un enfoque ontológico-semiótico* de la cognición matemática, dado el papel central que asignan al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos que intervienen. Para referirnos a esa manera de enfocar la investigación en didáctica de las matemáticas, utilizaremos el término «Teoría de Funciones Semióticas», ya que así es como se hace referencia, en otros trabajos de investigación, a este enfoque *ontológico-semiótico* de la cognición matemática.

En la TFS, se considera que los objetos matemáticos son entidades emergentes de los sistemas de prácticas que se realizan en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y que por tanto, son consecuencia de dichas prácticas. Al objeto matemático, se le asigna un estatuto derivado, mientras que la práctica ocupa un lugar privilegiado –a diferencia de lo que ocurre en otras teorías, en las que es el objeto el que ocupa ese lugar privilegiado. Por consiguiente, y dada su importancia, es necesario definir de modo inequívoco lo que se entiende por práctica en esta teoría.

Una primera definición de práctica es, en sentido amplio, la siguiente: la manipulación de ostensivos y del pensamiento que la acompaña. Las prácticas que se realizan en una institución escolar tienen un componente público –hay manipulación de ostensivos y son, por lo tanto, observables– y un componente privado –la manipulación de representaciones mentales no ostensivas y no observables. Si bien podríamos, en teoría, considerar prácticas que sólo tienen un componente –por ejemplo, la manipulación inconsciente de ostensivos, o bien una persona que sólo piensa– lo normal es que dichas prácticas incorporen estos dos componentes. Aunque esta definición de práctica es muy general, cuando la situamos en el contexto de la actividad matemática, permite definir las prácticas matemáticas (Godino y Batanero, 1994, p. 334): *Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.*

LOS OBJETOS PERSONALES

La relación existente entre las prácticas y los problemas que las suscitan hace que consideremos que lo que hay entre el estímulo –campo de problemas– y la respuesta –sistema de prácticas– no es una caja negra. Muy al contrario, es el lapso en el que tiene lugar el proceso nada mecánico de simbolización que permite que las experiencias se codifiquen significativamente y se procesen como signos, y éstos se manipulen y combinen siguiendo reglas y métodos elaborados al efecto para dar lugar a objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994, p. 335), *emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.* Estos objetos personales van cobrando forma –emergen– en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

Es conveniente efectuar algunas matizaciones a la hora de hablar del objeto personal. En primer lugar, un objeto personal es algo de lo que se tiene conciencia subjetiva. El hecho de que los individuos puedan hablar sobre sus objetos personales o, dicho de otra manera, puedan realizar prácticas discursivas sobre los mismos da lugar a una vía de investigación que tiene gran relevancia en la Didáctica de las Matemáticas. Por otra parte, un objeto personal implica la generación, por medio de la intersubjetividad, de una regla de comportamiento en el sujeto. Es esta última dimensión, que se conoce como máxima pragmática, la que se toma en consideración en Godino y Batanero (1994, p. 341) para definir el significado de un objeto personal O_p: *Es el sistema de prácticas personales de una persona* p *para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto* O_p *en un momento dado*.

Según esta definición de significado, el objeto personal requiere el establecimiento previo de una conexión entre acciones potenciales y fines. Además, dicha conexión es inteligente y, por lo tanto, está mediada simbólicamente. Por lo tanto, es necesario disponer de prácticas relacionadas con el campo de experiencia que el objeto abarca.

Asimismo, conviene observar que –dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y, también, en las que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares– dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. Es obvio, además, que el significado de un objeto personal queda ligado a otros objetos personales y significados, puesto que, en general, en las prácticas intervienen conjuntamente diversos objetos personales.

Esta forma de entender el significado postula unas entidades mentales, los objetos personales, que no nos alejan de las prácticas que se observan en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que éstas se construyen a lo largo de una interacción en el marco de una institución escolar.

Objetos institucionales

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales, pero como el sujeto está inmerso en instituciones donde necesariamente se dan interacciones tienen también un carácter colectivo. Por tanto, cualquier análisis que los abordara desde uno solo de estos aspectos resultaría demasiado limitado. Por este motivo, en la teoría TFS (Godino y Batanero 1994), se toman en consideración las instituciones, los objetos institucionales y los significados institucionales.

Para Godino y Batanero, una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso de todos con la misma problemática conlleva la realización de una serie de prácticas sociales compartidas, que están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Los objetos matemáticos se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas que se desarrollan en una institución y están ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar en función de las distintas instituciones, hemos de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. A lo largo del tiempo, emerge de manera progresiva y, en un momento dado, es reconocido como objeto por la institución, pero, incluso después de esta etapa, sufre transformaciones según se va ampliando el campo de problemas asociado.

Por otra parte, interesa resaltar los siguientes aspectos relacionados con al objeto institucional:

- Las personas distinguen entre sus objetos personales y los objetos institucionales. Cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona, mientras que cuando hablan de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona.
- Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. En Godino y Batanero (1994, p. 340), también se recurre a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional O_I: *Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge* O_I *en un momento dado*.

Para la TFS, la dialéctica entre persona e institución se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, lo que obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales, y a plantear la problemática que se deriva de la existencia de estas dos clases de objetos y de la relación entre ellos.

El constructivismo psicológico y, en general, todas las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas desde el enfoque cognitivo, se han centrado en los objetos personales. En el otro extremo, la antropología cognitiva prima el aspecto institucional y considera al sujeto un simple «corte institucional»:

> Lo que vemos como un individuo concreto no es más que «un corte institucional» de la persona, es decir, aquello que la institución en la que nos situamos, y desde donde miramos a la persona en cuestión, nos permite percibir en un momento dado (Bosch, 1994, p. 10).

Entre estos dos extremos, aparecen diferentes teorías que intentan explicar la dialéctica entre persona e institución sin olvidar ni a una ni a otra. Este es el contexto en el que se sitúa la teoría TFS.

Tipos de significados institucionales y personales

Para explicar la dialéctica entre institución y persona en el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático, interesa, si se quiere ser operativo, distinguir cuatro tipos, que designamos como: significado de referencia, pretendido, implementado y evaluado.

Cuando un profesor planifica para un grupo de estudiantes un proceso de instrucción sobre un objeto matemático, comienza por delimitar «lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas». Acudirá, por lo tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares y, en general, a lo que los «expertos» consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto que se fija como objetivo de la instrucción. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales, aquellos que previamente ha adquirido. Con todo ello, construirá un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia* del objeto (contenido o tema matemático).

Es importante remarcar que el «significado de referencia» es un constructo difícil de delimitar, ya que, en cierta manera, está implícito en todo el proceso –en términos metafóricos, se puede decir que el significado de referencia juega el mismo papel que «el conjunto universal» en la teoría de conjuntos. Este significado de referencia es la resultante de diferentes componentes: el significado del objeto en la institución matemática universitaria, la historia de dicho objeto, las orientaciones curriculares, los diferentes libros de texto y materiales que la institución escolar suele utilizar, los objetos didácticos y matemáticos personales de los profesores que forman parte de la institución, etc. Todos estos elementos, conforman un trasfondo a partir del cual el profesor, de acuerdo con el departamento de matemáticas de la institución escolar, elabora el significado pretendido. Algunos de estos componentes resultan fáciles de delimitar –por ejemplo, las orientaciones curriculares–, pero otros están presentes de manera muy difusa.

A partir del significado de referencia, el profesor selecciona, ordena y delimita la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado. Para ello, tiene en cuenta el tiempo disponible, los significados previos de los estudiantes y los medios de que dispone para la instrucción. Denominaremos *significado institucional pretendido* al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso de instrucción.

Hay que tener en cuenta que lo que se planifica no se pone en práctica tal y como se proyectó, puesto que las interacciones profesor-alumnos y alumnos-alumnos hacen que se introduzcan nuevos ejemplos, se obvien otros, se aborden cuestiones nuevas... Con el fin de introducir como objeto de investigación estos procesos de cambio en los significados institucionales, interesa hablar del *significado implementado*, considerado como el sistema de prácticas –operativas y discursivas– que tienen efectivamente lugar en la clase de matemáticas, y que servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.

En los procesos de evaluación, se pone en juego un cuarto tipo de significado institucional. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y las pautas de observación de los aprendizajes. Serán una muestra (se espera que representativa) del significado implementado que designamos como *significado institucional evaluado*.

Estos dos últimos tipos de significados institucionales son fáciles de determinar si se tiene una descripción detallada de las clases impartidas, pero los dos primeros resultan menos nítidos. El significado pretendido es difícil de concretar, básicamente porque los profesores no suelen dejar mucha constancia de su trabajo de planificación –la lectura de las actas de los departamentos de los centros escolares resulta, por ejemplo, una fuente insuficiente cuando se trata de delimitar el proceso que se ha seguido para pasar del significado de referencia al significado pretendido. En muchos casos, los docentes se limitan a seleccionar un libro de texto (o un material) que van modificando sobre la marcha para conseguir el significado implementado. Por tanto, en un proceso de estudio «normal», el libro de texto suele ser el significado pretendido. Sólo podemos tener información detallada de este significado pretendido cuando el profesor explica como ha elaborado el material que va a utilizar. Cuando nos situamos, por ejemplo, en una perspectiva propia de la ingeniería didáctica o de una investigación de estudios de casos, el significado pretendido se suele explicitar en la planificación del «experimento».

Desde el punto de vista del estudiante, y en un momento dado, cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. Cuando hablamos de:

- *significado global* nos referimos a la totalidad del sistema de prácticas personales relativas a un objeto matemático (contenido o tema) que es capaz de manifestar potencialmente el alumno;
- *significado declarado* damos cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluidas tanto las que son correctas desde el punto de vista institucional, como las que no lo son;
- *significado personal logrado* aludimos a las prácticas que se consideran acordes con la pauta institucional establecida. El significado declarado no concordante con el institucional se denomina habitualmente error de aprendizaje.

Es importante remarcar que en el significado global pueden influir otras materias además de las matemáticas. Por ejemplo[1], aunque, en una institución escolar, el significado pretendido de la derivada no contemple ni la notación incremental ni la diferencial, el significado personal declarado de los alumnos suele incorporar prácticas en las que dicha notación se utiliza (Inglada y Font, 2003). Este hecho se produce aún en el caso de que no se haya utilizado esta notación en clase de matemáticas, ya que el cociente incremental y el concepto de diferencial se utilizan habitualmente en clase de física, con lo que ciertas prácticas que utilizan la notación incremental y la diferencial forman parte del significado global del alumno como consecuencia del proceso de estudio que ha seguido en clase de física.

De acuerdo con este punto de vista, el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos de los profesores consiste en un conjunto de prácticas discursivas y operativas. Algunas de éstas están relacionadas con cómo debería ser el proceso de instrucción –componentes del significado de referencia– y otras intervienen, respectivamente, en la determinación del significado pretendido, implementado y evaluado. En algunos casos, el profesor puede no estar de acuerdo con otras componentes del significado de referencia, como, por ejemplo, el currículum oficial de la institución, pero, a pesar de ello, el significado que él pretende, implementa o evalúa puede ser muy parecido al de otro profesor cuya opinión es más acorde con dicho currículum.

CONCEPCIONES, CREENCIAS Y CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Un hecho ampliamente aceptado en el campo de la educación matemática es que las concepciones de los profesores y de las instituciones escolares sobre la naturaleza de las matemáticas influyen en su enseñanza. También se reconoce que no es el único factor que hay que tener en cuenta, ya que otros –como, por ejemplo, las concepciones pedagógicas y psicológicas de tipo general– también son muy importantes. Esta constatación ha llevado a la realización de numerosas investigaciones sobre lo que piensa, conoce o hace el profesor.

El marco teórico adoptado (TFS) es uno de los marcos posibles entre los que se puede optar cuando se pretende investigar las prácticas discursivas y operativas de los profesores. Puesto que son muchas

(1) Este ejemplo hay que situarlo dentro del contexto que configura el Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Cataluña (España).

las aproximaciones teóricas que se han interesado por el pensamiento y la práctica del profesor, nos referiremos a ellas como investigaciones sobre «creencias, concepciones y conocimiento del profesor». Éstas se han tenido en cuenta en esta investigación, y han sido consideradas como un marco de referencia más general que el de la TFS.

Si bien dichas aproximaciones teóricas son numerosas, hay básicamente dos maneras de enfocar una investigación sobre creencias, concepciones y conocimiento del profesor: una de ellas tiene como trasfondo la filosofía de la conciencia, mientras que la otra se basa en la filosofía de la acción. Estas dos formas de enfocar la investigación sirven de base para la clasificación que habitualmente se utiliza, y que distingue (Marcelo, 2002) entre las investigaciones sobre el *pensamiento del profesor* y las que se interesan por el *conocimiento del profesor*. Para la realización de las investigaciones sobre el pensamiento del profesor –mayoritarias en los años ochenta–, se adoptó fundamentalmente un enfoque cognitivo. Sin embargo, en la última década, y como consecuencia de la toma de conciencia sobre la conveniencia de investigar el hecho de que los profesores generen conocimiento sobre la enseñanza a partir de su práctica, este tipo de investigación ha dado paso a una preocupación por el conocimiento del profesor.

La filosofía de la conciencia presupone que existe un mundo independiente del sujeto y que, por medio de representaciones mentales el sujeto puede actuar sobre éste. Es decir, tenemos una mente que nos permite representarnos el mundo y llevar a cabo procesos mentales. En la mente, residen concepciones, creencias, esquemas, etc. Por lo tanto, desde esta perspectiva, las concepciones y creencias son objetos mentales que las personas llevan consigo y que son la causa oculta de sus acciones. El primer objetivo de una agenda de investigación basada en este punto de vista es conocer estos objetos mentales y el segundo modificarlos con el fin de permitir llevar a cabo acciones más efectivas.

Es posible realizar una crítica de esta agenda de investigación desde diferentes perspectivas. Se puede señalar, en primer lugar, que enfatiza el aspecto personal, y le concede primacía sobre el social; en segundo lugar, que asume la existencia de una relación directa y causal entre el pensamiento y las prácticas; y, finalmente, que no valora suficientemente la importancia que tiene el contexto en el que se realizan las prácticas.

En principio, la filosofía de la acción no se interesa por las representaciones mentales de los sujetos, sino por sus prácticas discursivas y operativas –por lo que dicen y hacen las personas, y la reflexión que realizan a partir de su práctica. No pretende situarse en la mente del sujeto para poder explicar su comportamiento, intenta comprender el sentido de la acción en el contexto social donde se produce. Aunque no es fácil liberarse de la filosofía de la conciencia –el lenguaje que utilizamos nos la impone constantemente–, la investigación que se presenta se posiciona explícitamente en esta segunda perspectiva, puesto que adopta como principal marco teórico la TFS.

Podemos enfocar de dos maneras la distinción entre creencias y concepciones presente en las diferentes investigaciones. Podemos considerar que las creencias son un conocimiento básico que no se cuestiona, que se asume sin que se plantee ningún tipo de problemática, y que las concepciones son un conocimiento más elaborado, más racional y más «proposicional» (Martínez, 2003), o bien diferenciar las concepciones y las creencias en función de la temática. Las concepciones tendrían que ver con las matemáticas, y las creencias con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas –tal y como ocurre en Moreno (2001) y Moreno y Azcárate (2003). Además, hay una tercera clasificación que diferencia la temática según sea ésta particular o general. Estas tres clasificaciones se pueden considerar conjuntamente, ya que se pueden tener creencias o concepciones sobre las matemáticas en general o, por ejemplo, sobre la resta en particular, y también sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en general o de la resta en particular.

Estas tres clasificaciones están presentes en mayor o menor medida en las diferentes investigaciones realizadas sobre el conocimiento del profesor, ya que, según Llinares (1998), la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor consideran que está formado por los siguientes componentes:

> a) Conocimiento de matemática (conceptos, procesos...) y sobre la matemática (concepciones sobre la naturaleza de la matemática escolar). b) Conocimiento del currículum matemático. c) Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos... d) Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas... e) Conocimiento sobre la enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización de la enseñanza, evaluación (Llinares, 1998, p. 57).

ADAPTACIÓN DE LA INSTITUCIÓN A CAMBIOS E INNOVACIONES

Las instituciones educativas son un tipo de organización que tiene problemas para adaptarse a cambios e innovaciones, ya que, de entrada, son reacias a la introducción de innovaciones y poco flexibles. La manera más eficaz de introducir innovaciones en una institución es un tema sobre el que hay importantes desacuerdos, motivados por las diferencias en la manera de entender la relación que se establece entre las instituciones y las personas en las que se encarna dicha institución. La sociología diferencia (Flecha, Gómez y Puigvert, 2001), fundamentalmente, entre el punto de vista sistémico, el punto de vista de los sujetos, y el punto de vista de los sistemas y los sujetos (dual). El primero concede especial importancia a la institución y considera que ésta determina la práctica de los profesores; el segundo dirige su atención a los sujetos y deja en un segundo plano a la institución; y el tercero hace hincapié tanto en las instituciones, como en las personas.

El punto de vista sistémico –cuyo principal referente es la obra de Luhmann (1998)– considera que la institución escolar es una organización frente a la cual los profesores pueden hacer poco. Tal suposición determina que este punto de vista tenga dificultades para explicar los movimientos de renovación. Un ejemplo de su aplicación lo constituye el análisis de la actividad del profesor de matemáticas que se realiza desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992, 1999). Para esta teoría (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003), la «observación naturalista» de la actividad del profesor conduce a conceder mayor relevancia a las características de las organizaciones matemáticas que se proponen para ser estudiadas y que forman parte, en cierto sentido, del conjunto de «condiciones y restricciones matemáticas» que rigen la práctica del profesor. El enfoque antropológico se opone a las concepciones de la enseñanza que otorgan al profesor un papel protagonista dentro de la relación didáctica, como si sólo de él dependiera el correcto desarrollo del proceso didáctico. Y, por el contrario, anteponen el análisis de la actividad docente, entendida como una actividad institucional y colectiva, al de la actividad personal del profesor, en tanto actividad de tal o cual profesor en particular.

En el otro extremo tenemos los puntos de vista que centran su atención en el individuo, y cuyo principal referente son los estudios sobre el «mundo de la vida» realizados por la fenomenología social (Schütz 1993), que sostienen que, si queremos saber lo que pasa en una institución escolar, debemos preguntar a las personas que protagonizan el proceso de enseñanza-aprendizaje e interpretar sus respuestas, puesto que las personas, y no las instituciones, protagonizan realmente el proceso de enseñanza-aprendizaje. La fenomenología social mantiene que el conocimiento de las concepciones, creencias, intenciones, etc. de los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje permitiría a las instituciones escolares dirigir mejor sus acciones y conseguir mejor resultados. Por lo tanto, el cambio y la innovación en la institución escolar son lentos y, en todo caso, deben basarse en la formación de los profesores y el desarrollo de experiencias innovadoras que han de ser realizadas por profesores innovadores y entusiastas antes de que, con el tiempo, sean asumidas por sus compañeros.

El punto de vista dual, que tiene como principal referente la obra de Habermas (1987), considera que hay que tener en cuenta lo institucional, pero también a los sujetos que encarnan estas instituciones. Desde esta perspectiva, el conocimiento de las concepciones, creencias, intenciones, etc. de los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje es tan importante como lo institucional, ya que ambas vertientes son determinantes para que se produzca –o no– el cambio en la institución.

En esta investigación, nos hemos posicionado en este punto de vista dual, lo que nos ha permitido atender tanto a lo institucional, como a los argumentos de los sujetos que forman parte de dicha institución. Al posicionarnos en la perspectiva dual, hemos tenido en cuenta las aportaciones de la filosofía dialógica en general y, en particular, los constructos elaborados por Valero (1999) para la educación matemática. Para esta investigadora, una perspectiva crítica del proceso de instrucción debe ofrecer posibilidades para desarrollar una competencia crítica y de acción colectiva caracterizada por:

- La *deliberación*, vista como un proceso comunicativo colectivo que permite a un grupo considerar atenta y cuidadosamente, en primer lugar, las existencia o no de razones que justifiquen sus opiniones y juicios preliminares; en segundo lugar, las ventajas y desventajas de las posibles decisiones antes de tomarlas; y, en tercer lugar, los beneficios y perjuicios de las distintas alternativas de acción antes de optar por alguna de ellas.
- La *«coflexión»*, considerada como un proceso colectivo de conocimiento reflexivo que permite que los miembros de un grupo hagan, de manera consciente, de las reflexiones de los otros sobre sí mismos y, en especial, sobre sus acciones conjuntas su objeto de pensamiento y comprensión.
- La *transformación*, interpretada como el centro de una intencionalidad colectiva encaminada hacia el mejoramiento continuo de las condiciones sociales y materiales del grupo.

El objeto función

Dentro de la investigación didáctica reciente sobre el concepto de función hay que destacar, por una parte, las investigaciones que se han ocupado de analizar el papel que juegan las diferentes clases de representación del concepto de función (Borba y Conferí, 1996; Font, 2001 y 2001 b; Fuente y Aranda, 1994; Janvier, 1987; García, 1994; García y Llinares, 1994; Romberg, Carpenter y Fennema, 1994; Ruthven, 1990, Schwartz y Dreyfus, 1995) y, por otra, las que se han centrado en la noción de función como proceso y como objeto (Breindenbach y otros, 1992; Dubinsky y Harel, 1992; Dubinsky, 1991, 1996; Sfard, 1991, 1992; Slavitt, 1997).

Janvier (1987), en sus trabajos sobre el concepto de función, considera que las representaciones asociadas al concepto de función –aquí llamadas representaciones ostensivas– se pueden clasificar en cuatro clases –expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal– que, aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitvos, cada uno de los cuales está estrechamente relacionado con los otros –la representación gráfica conecta con las potencialidades de conceptuación de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología, la representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos, la expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona, principalmente, con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres. Gracias a su poder explicativo y relacional, las ideas de Janvier han servido de base a muchas investigaciones posteriores sobre la didáctica de las funciones y se han concretado en materiales de clase que han hecho cambiar la manera de trabajar las funciones en las aulas. Janvier, entre otros, considera que el aprendizaje de las funciones no se ha de limitar a una sola de estas formas de representación, sino que ha de incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra.

En esta investigación, hemos considerado importante que el profesorado de la institución escolar tuviera conocimiento de estos resultados y valorara conjuntamente su incorporación al proceso de instrucción de estas dos cuestiones y, muy en especial, la presentación de diferentes formas de representar las funciones.

La «modelización» y la «contextualización»

El término contexto recibe básicamente dos usos: uno considera el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático y otro da más detalles acerca del caso particular –lo enmarca en el entorno. Aunque estos dos usos son importantes, consideramos que, de los dos, el más importante es el primero, ya que la relación entre el ejemplar y el tipo –entre lo concreto y lo abstracto o entre lo extensivo y lo intensivo– es básica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Se han realizado diferentes clasificaciones de las situaciones que ubican en su contexto un objeto matemático, pero, en esta investigación, hemos utilizado la propuesta en Martínez (2003). Este autor distingue los siguientes tipos de contextos:

- El contexto real, es decir, la práctica real de la matemáticas en el entorno sociocultural donde dicha práctica tiene lugar.
- El contexto simulado, que tiene su origen o fuente en el contexto real, ya que es una representación del

contexto real y reproduce parte de sus características.

- El contexto evocado, las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, que permiten imaginar el marco o la situación donde se da este hecho.

Cuando se reflexiona acerca del contexto y la relación de la práctica de las matemáticas con éste, se plantea un problema muy complicado, que no es otro que el de la construcción del significado. En lo que respecta a la construcción del significado, en nuestra opinión, hay básicamente dos posiciones: la semántica o referencial y la pragmática (Núñez y Font, 1995).

El punto de vista semántico considera que la pieza clave para la construcción del significado es el referente, es decir, los ejemplos del concepto. Por consiguiente, el problema de situar en el contexto sería, en cierto modo, que el profesor tiene que enseñar un objeto matemático descontextualizado, por lo que tiene que buscar ejemplos concretos de dicho objeto que, a ser posible, lo coloquen en situaciones reales, es decir, ubicarlo en un contexto. A partir de estas situaciones, y como resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje, el alumno ha de extraerlo de dicho contexto para construir el objeto matemático y poder, posteriormente, aplicar este objeto matemático a otros contextos –es decir, ha de ser capaz de volver a ubicarlo en el contexto. De este modo, todos los ejemplos del concepto son iguales, ya que se considera que los ejemplos del concepto forman una clase homogénea. Sin embargo, este punto de vista tiene dificultades para explicar, entre otras cosas, la falta de transferencia de un contexto a otro y los fenómenos del prototipo –es decir, el hecho de que las personas no suelen considerar los ejemplos de un concepto como una clase homogénea.

El punto de vista pragmático de la construcción del significado considera que el elemento clave de la construcción de significado es el uso. En consecuencia, el significado se define en términos de prácticas. La respuesta a la pregunta «¿cuál es el significado de un objeto matemático?» es que el significado es el sistema de prácticas en las que el objeto matemático en cuestión es un elemento determinante para la realización –o no– de la práctica.

Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, el significado del objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que, en las prácticas, no sólo interviene dicho objeto, sino también otros objetos matemáticos. Este hecho permite distinguir dos términos que resultan, a priori, difíciles de diferenciar: *sentido* y *significado*. En efecto, puesto que dicho objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, podemos entender el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas.

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas permite agrupar prácticas específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación, y que adquieren un determinado sentido que permite establecer clases. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Desde esta perspectiva, un criterio para determinar la idoneidad de una trayectoria didáctica para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que confiere significado al objeto. Hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos representativa que permita, asimismo, construir una muestra que ponga de manifiesto los diferentes sentidos del objeto.

Un término muy relacionado con el proceso de contextualización y descontextualización de los objetos matemáticos es el de «modelización». De los diferentes usos que tiene este término, uno tiene que ver con la relación entre el objeto y su contexto: el uso que hace del término modelo la concepción de las matemáticas llamada «formalismo». En dicha concepción de las matemáticas, se denomina modelo de una teoría a cualquier interpretación que haga verdaderas las formas de sus axiomas. Otros usos, en cambio, tienen que ver con la descontextualización del objeto, ya que entienden la modelización como el paso del contexto al objeto matemático. En este trabajo, adoptaremos el siguiente punto de vista sobre la modelización (Godino, Batanero y Font 2003, p. 132):

> Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización, en el que interpretamos de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. La construcción de modelos matemáticos, su comparación con la realidad, y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas matemáticos, no sólo relacionados con situaciones prácticas, sino también en el trabajo de desarrollo teórico. Este proceso seguiría las cinco fases siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

La modelización es un proceso complejo que requiere partir de la situación concreta para –gracias a un proceso de descontextualización– obtener un objeto matemático, y, después, aplicar este objeto a diferentes situaciones reales. En esta investigación, se ha utilizado el término «matemáticas contextualizadas» cuando se pretende que el alumno realice alguno de estos procesos o ambos. Hablamos de «descontextualización» para referirnos al proceso que va de la realidad al objeto matemático, de «contextualización» para indicar el proceso que va del objeto matemático a la realidad y de «modelización» cuando se presenta a los alumnos una situación suficientemente rica como para permitir la realización de los cinco pasos anteriores. Es decir, se ha reservado el término «modelización» para metodologías del tipo «proyectos de trabajo» como los descritos en Aravena (2001), Gómez y Fortuny (2003) o Skovsmose (1994).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con el marco teórico adoptado, el objetivo general de la investigación se concretó en objetivos más específicos.

OBJETIVO GENERAL

El objetivo general era analizar el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura «Introducción a la Matemática» impartida en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FaCES) de Carabobo (Venezuela).

Objetivos específicos

Los objetivos específicos relacionados con el significado de referencia eran:

- El análisis epistemológico e histórico del objeto función real.
- El análisis de los resultados ofrecidos por la investigación didáctica sobre las funciones.
- El análisis del currículo de FaCES y otros currículos de diferentes universidades Venezolanas con facultades de Ciencias Económicas y Sociales.
- El estudio de textos y otros documentos didácticos utilizados por los docentes de la asignatura para enseñar las funciones.
- La determinación de las opiniones de los docentes acerca de la posibilidad de incorporar matemática contextualizada y modelizada al proceso de instrucción del objeto función.
- El análisis de la competencia de los docentes en la resolución de situaciones contextualizadas en las que intervienen las funciones.
- El análisis de la resolución, por parte de los alumnos, de problemas contextualizados en los que intervienen las funciones.
- La identificación de las opiniones de los profesores sobre la matemática y su enseñanza.

Los objetivos específicos relacionados con el significado pretendido eran:

- El estudio de puntos de consenso en la institución FaCES para la introducción, en el currículo de la asignatura, de la matemática contextualizada y modelizada para la enseñanza y el aprendizaje del objeto función.
- El diseño, en la institución, de una secuencia de actividades consensuada y que contemplara situaciones contextualizadas para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones en la asignatura «Introducción a la Matemática».

CONTEXTO Y SUJETOS DE LA INVESTIGACIÓN

La Facultad de Ciencias Económicas y Sociales FaCES

La Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FaCES) pertenece a la Universidad de Carabobo, ubicada en la ciudad de Valencia, capital del estado Carabobo (Venezuela). Es una institución donde se forman profesionales del área económica y social. Las labores docentes de la facultad se desarrollan a través de la dirección de Estudios Básicos (Ciclo Básico) y las cuatro escuelas (Ciclo Profesional) a las que corresponde dirigir y coordinar el funcionamiento de las labores de enseñanza e investigación.

Características de la asignatura «Introducción a la Matemática»

La asignatura «Introducción a la Matemática» pertenece al bloque de materias ubicadas en el Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales –Introducción a la Matemática, Historia Contemporánea, Métodos de Investigación I, y una cuarta asignatura que varía dependiendo de la especialidad escogida por el alumno. Este Ciclo Básico común tiene una duración de un año, repartido en dos semestres. Hay que hacer notar que la asignatura «Introducción a la Matemática» se imparte durante el primer semestre en todas las escuelas de la Facultad y consta de cuatro unidades:

- Elementos de la Lógica Proposicional.
- Introducción a la Teoría de Conjuntos.
- Introducción al Estudio de Funciones Lógicas.
- Introducción al Estudio de las Funciones Reales.

La cátedra de «Introducción a la Matemática» cuenta con un total de 15 profesores, de los cuales, actualmente, 11 desarrollan su actividad en las aulas y cuatro realizan estudios superiores fuera del país. Para suplir a este personal, se cuenta con los servicios profesionales de cuatro profesores contratados. Por tanto, se dispone de 11 profesores ordinarios y cuatro profesores contratados. Además, hay que señalar que esta cátedra tiene autonomía para modificar el *vitae*, y será considerada como una institución de acuerdo con la definición que se incluye en el marco teórico.

METODOLOGÍA

De acuerdo con la metodología empleada, se puede afirmar que la investigación es interpretativa y cualitativa. Por una parte es:

- Etnográfica: se pretende comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, y, para ello, se recurre a la inmersión en su pensamiento y en su práctica.
- Longitudinal: la información se recabará en diferentes momentos a lo largo de un período de dos cursos.
- De campo: la información se obtendrá en el lugar de trabajo de los sujetos investigados. Para ello, se ha previsto la aplicación de los siguientes instrumentos:

– Publicaciones sobre la historia de las funciones e investigaciones sobre la didáctica de las funciones, la contextualización y la modelización.
– Los documentos curriculares, los libros de texto y los exámenes de la institución.
– El cuestionario para determinar la competencia de los docentes en la resolución de problemas contextualizados en los que interviene el objeto función.
– El cuestionario para averiguar los puntos de vista de los docentes acerca de la posibilidad de incorporar matemática contextualizada y modelizada al proceso de instrucción sobre el objeto función.
– La entrevista semiestructurada que permite comentar y triangular las respuestas dadas a los dos cuestionarios anteriores. Esta entrevista será grabada en video.
– El cuestionario de ponderación que determinará su posicionamiento sobre las matemáticas en general con el objetivo de descubrir si existe o no relación entre su visión de las matemáticas y la propuesta curricular de la institución.
– El seminario sobre funciones y contextualización. Este seminario será coordinado por uno de los investigadores y será grabado en video[2].

(2) La idea de utilizar un seminario de formación como instrumento de investigación fue sugerida por la lectura de la investigación descrita en Martínez (2003).

FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se realiza en dos fases claramente diferenciadas. Los objetivos de la primera fase (ya realizada) y en la que los investigadores adoptaron una posición no participante, fueron:

- conocer algunos elementos del significado de referencia, del significado actualmente pretendido y del significado implementado del objeto función en la institución,
- conocer la competencia de los docentes en la resolución de problemas contextualizados sobre funciones,
- conocer sus argumentos para la introducción –o no– de una enseñanza contextualizada de las funciones, y
- averiguar si el significado implementado actualmente en la institución es consecuencia de una posición clara de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas.

Se trata básicamente de una primera etapa de recogida de información relacionada con las prácticas realizadas en la institución y la argumentación de los profesores sobre dichas prácticas. En esta primera fase, se utilizaron los instrumentos 1-6 para conseguir los ocho objetivos relacionados con el significado de referencia.

En la segunda fase (en realización), se pretende –por medio de un curso de formación acerca de las funciones– llegar a un consenso racional sobre si es o no posible incorporar situaciones contextualizadas a la enseñanza de las funciones en la institución. Para ello, utilizaremos los principales argumentos detectados en la primera fase de la investigación, cuestionaremos de su validez dando razones que, como mínimo, inciten a la duda, y pediremos a los docentes que argumenten sobre la conveniencia de aceptar o recusar las pretensiones de validez que se han vuelto dudosas, para así conseguir –o no– en la institución, un consenso que pueda llegar a modificar el significado pretendido y el actualmente implementado. En esta segunda fase, uno de los investigadores será, además, el coordinador del seminario. Se utilizará el instrumento número siete para alcanzar los dos objetivos relacionados con el significado pretendido.

RESULTADOS DE LA PRIMERA FASE

En este apartado, comentaremos los principales resultados obtenidos en la primera fase de la investigación. Algunos de ellos se explicarán con detalle, mientras que otros solamente serán enunciados.

El análisis de los documentos curriculares, los libros de texto y los exámenes de la institución nos permitió obtener el siguiente resultado:

- *Resultado número uno:* La enseñanza actual de las funciones en la institución investigada es formalista y descontextualizada.

Los primeros apartados de los ocho problemas del cuestionario del anexo I tenían por objetivo determinar la competencia de los docentes en la resolución de problemas contextualizados en los que interviene el objeto función. Los ocho problemas que los profesores tenían que resolver presentaban una dificultad mediana[3]. Este cuestionario fue contestado por

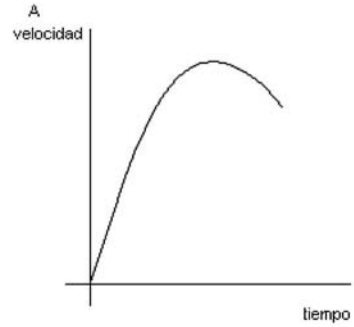
(3) Son problemas extraídos de un libro de texto correspondiente al currículum de primero de bachillerato de la comunidad autónoma de Cataluña (España).

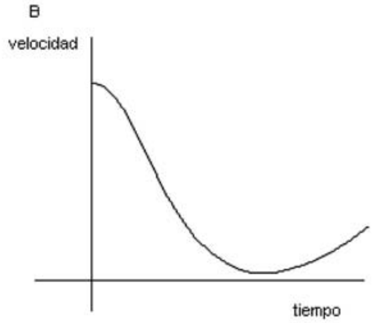
seis[4] profesores de la institución –cinco de ellos eran licenciados en educación (mención matemática) y el otro ingeniero industrial–, cuya experiencia docente variaba entre los 10 y los 30 años.

A pesar de que los profesores que contestaron eran competentes en el uso descontextualizado de las funciones, cometieron errores al resolver los problemas contextualizados del cuestionario. Por ejemplo, las respuestas al problema número tres.

> *Problema tres:* Queremos representar una gráfica para describir la variación de la velocidad que experimenta una pelota de baloncesto en un lanzamiento de tres puntos, desde el momento que sale de las manos del jugador hasta que llega a la canasta.

– ¿Cuál de las dos gráficas siguientes crees que es la más correcta?¿Por qué?
– ¿Cuál crees que será la gráfica que escogerán los alumnos?





El hecho de que en cinco de las ocho preguntas (1, 3, 4, 5 y 6) la mitad de los profesores se equivocaran en sus respuestas nos permitió obtener los siguientes resultados.

TABLA I
Respuestas de los profesores al problema número tres

PROFESORES	Respuestas
1	B, porque se trata de una variación de velocidad
2	B, inicialmente la velocidad es distinta de cero y luego decrece
3	A, debido a que es un lanzamiento inclinado hacia arriba en el vacío
4	B, porque la velocidad disminuye a medida que pasa el tiempo
5	A, la pelota es lanzada hacia arriba
6	A

(4) Debido a los acontecimientos político-sociales acaecidos en Venezuela en los meses de diciembre de 2002 y enero de 2003, sólo contestaron seis de los profesores de la institución. Dichos acontecimientos hicieron que resultara imposible reunir a todos los profesores para contestar el cuestionario.

- *Resultado número dos:* El hecho de utilizar los objetos matemáticos de manera descontextualizada con rigor y competencia no asegura que dichos objetos se puedan aplicar correctamente a la resolución de problemas contextualizados no rutinarios.

Como corolario de éste resultado se obtiene el siguiente –el número tres–, ya que es de suponer que los alumnos tendrán más dificultades que los profesores para resolver problemas contextualizados. A este resultado también llegamos después de aplicar un cuestionario con cinco problemas contextualizados (que no comentaremos con detalle en este artículo por cuestiones de espacio) a una muestra heterogénea de 38 alumnos, de los cuales: dos tenían aprobada «Matemática I», cuatro cursaban la asignatura «Matemática II» y el resto la asignatura «Introducción a la Matemática» en la especialidad de Economía. Hay que señalar que todos los participantes fueron voluntarios y que sus edades oscilaban entre los 17 y los 19 años, aunque uno de los estudiantes tenía 22 años. Ninguno de los 38 alumnos pudo contestar el siguiente problema del cuestionario:

> Problema: Un edificio de 5 plantas, en el que cada planta tiene una altura de 4 m, dispone de un ascensor con las siguientes características: Tiempo que tarda en subir un piso: 7 seg. Tiempo de parada en el piso solicitado: 5 seg. El ascensor hace el siguiente recorrido (a velocidad constante): parte de la planta baja y se para en el 2º, 3º y 5º piso.
>
> Se pide:
>
> – ¿Podrías determinar para esta situación una función matemática?
> – ¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente la situación anterior?
> – ¿Podrías dibujar en unos ejes cartesianos, la gráfica que representa el espacio recorrido por el ascensor, según el tiempo transcurrido?
> – Determina el Dominio.

- *Resultado número tres:* El significado global de los alumnos que han cursado la asignatura «Introducción a la Matemática» no incorpora prácticas que permitan resolver la mayoría de problemas contextualizados no rutinarios en los que interviene el objeto función.

El hecho de que los alumnos y muchos profesores fracasen en este tipo de problemas permite llegar al siguiente resultado, el número cuatro.

- *Resultado número cuatro:* La validez del siguiente argumento, considerado válido por algunos docentes, es dudosa: *la matemática que se enseña en la asignatura «Introducción a las Matemáticas» puede ser aplicada posteriormente por el alumno, con cierta facilidad, a situaciones contextualizadas*.

Los apartados finales de las ocho preguntas del cuestionario del anexo I tenían por objetivo saber:

- el parecer de los docentes acerca de la ubicación de los ocho problemas del cuestionario en el currículum de la asignatura,
- su opinión sobre la utilidad de dichos problemas para los alumnos,
- qué consideraban más novedoso de este tipo de problemas,
- las dificultades que, en su opinión,

- podían tener los alumnos al resolver estos problemas, y
- qué contenidos del currículum se tendrían que modificar para incorporar este tipo de problemas.

Estas cuestiones volvieron a tratarse en una entrevista semi-estructurada grabada en video que se realizó a cada uno de los seis profesores siguiendo un guión previo (anexo II). Cinco de los profesores se ajustaron al guión previsto, pero el sexto no quiso seguirlo y prefirió centrar su discurso en la ubicación e importancia de la asignatura «Introducción a la Matemática». La duración aproximada de la entrevista fue de 30 minutos, en el caso de cada uno de los cinco profesores que se ajustaron al guión, mientras que el sexto profesor consumió el tiempo que él considero necesario para explicar lo que quería. A continuación, comentaremos primero en bloque los resultados que se derivan de las respuestas de los cinco profesores que se ajustaron al guión de la entrevista y, después, haremos algunos comentarios sobre las afirmaciones del profesor que no lo hizo.

El que las preguntas del cuestionario y la entrevista se centraran en las mismas cuestiones responde al interés por triangular las opiniones de los profesores. Para Cohen (1990, p. 131), *la técnica de triangulación no es otra cosa que el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano*. A continuación, exponemos los resultados de dicha triangulación:

- En cuanto al grado de dificultad:
  - Cuestionario: Piensan que son sencillos.
  - Entrevista: A la mayoría de los docentes le parece que el nivel era adecuado-moderado.
- En cuanto a la dificultad que van a tener los alumnos para responder este tipo de problemas:
  - Cuesionario: entre otras, los esquemas de trabajo de los alumnos y capacidad disminuida.
  - Entrevista: Las bases y los esquemas que traen del bachillerato.
- En cuanto a la inclusión de la matemática contextualizada en el currículo:
  - Cuestionario: Debe existir un consenso por parte de los profesores de la cátedra.
  - Entrevista: Todos los docentes opinan que sí es posible introducir este tipo de matemáticas en el currículo de la asignatura si se consigue un consenso.
- En cuanto a si el grado de dificultan será un obstáculo para introducírsete tipo de problemas en el currículo de la asignatura:
  - Cuestionario: Consideran que éste no es el obstáculo. El mayor obstáculo es el tiempo.
  - Entrevista: Para todos el grado de dificultad no representa un obstáculo.
- En cuanto a lo factible de introducir esta matemática-contextualizada:
  - Encuesta/entrevista: Todos consideran que es factible, pero puntualizan que deben emplearse problemas dedicados a las Ciencias Económicas y Sociales.
- En cuanto a lo que se puede hacer para introducir matemática

contextualizada y/o modelizada en el currículo de la asignatura:

– Encuesta/entrevista: Opinan que tienen que reunirse todos los profesores de la cátedra y alcanzar un acuerdo por consenso.

- Con relación a las preguntas de los alumnos del tipo: ¿Para qué me sirve esto o aquello? ¿Para qué tengo que aprender esta Matemática?...

– Entrevista/encuesta: La mayoría piensa que los alumnos no van a plantear este tipo de preguntas.

- En cuanto al hecho de que esta forma de aprendizaje de la matemática pueda ser más interesante y agradable para los alumnos:

– Entrevista/encuesta: Todos consideran que sí es realmente interesante.

- En cuanto a si conocían esta forma de trabajar la matemática:

– Entrevista/encuesta: La mayoría sí la conocía, pero de esta forma y dentro de las asignaturas de matemática no la han trabajado.

- En cuanto a la adecuación de los problemas:

– Entrevista/encuesta: Todos están totalmente de acuerdo con los problemas 1 y 8 –problemas de costo y compra respectivamente. En los demás casos, la mayoría está de acuerdo con los problemas planteados, salvo en lo que respecta al número 6, referido al lanzamiento de un paracaidista. La mayoría expresó que no le gustaba el problema 6 debido la falta de precisión acerca del momento en que se abre el paracaídas.

Los resultados de esta triangulación significativos para nuestra investigación fueron los siguientes:

- *Resultado número cinco*: La mayoría de los docentes tiene buena disposición para incorporar matemática contextualizada al proceso de instrucción del objeto función. Su buena disposición se basa en argumentos de tipo emocional –consideran que este tipo de situaciones va a motivar a los alumnos– y en argumentos de tipo epistémico –piensan que permiten trabajar con el tipo de situaciones en las que los alumnos tendrán que aplicar posteriormente sus conocimientos matemáticos.

- *Resultado número seis*: De los ocho problemas que se propusieron los docentes, estos se mostraron muy partidarios de introducir aquellos en los que el contexto era una situación económica (costo, compra, etc.) –como los problemas 1 y 8– y menos partidarios de introducir los que se utilizaban contextos poco relacionados con la economía –el problema 6, por ejemplo.

- *Resultado número siete*: A pesar de la buena disposición manifestada, los docentes consideran que hay dos tipos de problemas para la incorporación de la enseñanza contextualizada de las funciones. El primero tiene que ver con argumentos de tipo cognitivo –la falta de recursos previos de los alumnos– y el segundo con argumentos «mediacionales» –falta de tiempo.

- *Resultado número ocho*: Por lo que respecta a la manera en la que se tendría que incorporar este tipo de enseñanza contextualizada, todos opinan que tienen que reunirse todos los profesores de la institución y llegar a un acuerdo para incorporar o no este tipo de enseñanza.

A continuación, se incluye la trascripción de la entrevista realizada con el sexto profesor. Este profesor no respondió a la encuesta semi-estructurada y prefirió centrarse en un discurso informativo sobre la ubicación e importancia de la asignatura «Introducción a la Matemática» porque, según él, era mucho más interesante y valioso que él hablase de la asignatura.

P: El hecho de que la asignatura «Introducción a la Matemática» esté en el primer nivel obedece fundamentalmente para crear las bases, las herramientas básicas para que el alumno, posteriormente, en el desarrollo de su carrera, facilite todo el entendimiento, el aprendizaje y la aplicación en las materias de matemática de la carrera, fundamentalmente. Y más en está facultad, que es una facultad de Ciencias Económicas y sociales, va a tener mucha aplicación de corte económico, fundamentalmente de corte financiero, donde las materias tienen mayor aplicación. Por eso es que se desarrolla en la primera parte del programa, la parte de cálculo proposicional, el análisis y todas las interacciones del estudio de la proposición, las interacciones entre proposiciones, etc. Luego se inserta, posteriormente, una vez que ha sido agotado el cálculo proposicional, se inserta la teoría de conjuntos. Esto te permite poder analizar con facilidad, con sencillez, de una manera muy simple, el estudio de las funciones lógicas. Como ya sabemos, luego de la teoría de conjuntos, vienen una serie de analices de las funciones lógicas. Pero todos estos contenidos, fundamentalmente dirigidos hacía la matemática. ¿Por qué esto? Bueno, porque somos el inicio de una cadena matemática, luego esa es nuestra función. En donde, posteriormente, en Matemática I, el alumno va a ver las aplicaciones de todos estos conceptos que nosotros le damos. Eso es en cuanto a la primera parte del programa de «Introducción a la Matemática», que es la parte de lógica proposicional. Una vez que hemos finalizado esa primera parte, la de lógica proposicional, comenzamos con la introducción a la matemática. Iniciamos al alumno en el estudio de gráficas, con todos sus movimientos básicos, sin extendernos en sus aplicaciones, porque esas aplicaciones pertenecen al programa de Matemática I. Porque en la parte que a nosotros nos corresponde de acuerdo al programa, es para que a los alumnos se les den los fundamentos para que ellos sepan como graficar, saber hacer gráficas sencillas, en funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto, tipos de funciones. En la parte de comportamiento, se les enseña a identificar las variables, ya sea dependiente o independiente, a ver como una variable independiente actúa y provoca una variable dependiente, y cómo graficar eso. Además de cómo interpretar las gráficas, etc.
Todo esto, como lo dije al principio, con la intención de que el alumno tenga una herramienta básica que le permita entender los problemas que se le van a dar posteriormente en las matemáticas siguientes (I, II), y

cuando son estudiantes de economía matemática (III), pero todas ellas tienen esa misma intención. Hay un factor que es muy importante, y que debo señalar, que es la parte de cuantificadores, pues esta parte introduce un elemento importante para las definiciones, sobre todo, al inicio lo que es en la teoría de límite y, posteriormente, la derivada y sus aplicaciones. Es indispensable, aquí, tener estos conocimientos básicos, pues ellos facilitan mucho el estudio de esos conceptos. Porque cuando vas a estudiar el límite no nada más necesitas escribir cuantificadores, sino también la formalización, la interpretación, además de saberlos leer correctamente.

I: De acuerdo a sus afirmaciones, yo puedo interpretar que para usted la aplicación de este tipo de problemas se debe dejar para otras asignaturas.

P: Fundamentalmente si. Quizás algunos ejemplos sencillos puedan colocarse, pero a manera de ejemplos en funciones lineales. Yo creo que, en la parte de gráficas de funciones lineales, se pueda plantear algo, de esta manera novedosa que tú planteas, sí, con algunos ejemplos sencillos. Pueden ser planteamientos de tipo económico, básicamente de esa índole. Pues como ya té había dicho, esos problemas deben verse fundamentalmente en los problemas económicos que se dan en Matemática I. Pertenecen a esa asignatura e, inclusive, se pueden ver con un mayor rango de dificultad, porque, claro, ya en Matemática I, ya tienen las herramientas que le hemos estado dando en esta primera etapa del inicio de sus carreras.

I: ¿Entonces, para usted, estos problemas dónde deben iniciarse es en la asignatura Matemática I?

P: Claro, en Matemática I. Es más, sería mucho más útil, ya que tienen las herramientas, bueno y como cuentan con esas herramientas, entonces la aplicación es mejor, de manera que el alumno no vea la matemática tan abstracta, sino que vea su aplicabilidad, pero una vez que él maneje las herramientas, la aplicabilidad sería muy interesante, sobre todo la aplicabilidad de las funciones en cosas cotidianas.

Para este profesor, la asignatura «Introducción a la Matemática» se ubica en el primer nivel –primer semestre del Ciclo Básico– y se explica de manera formal y descontextualizada con la finalidad de facilitar a los alumnos las herramientas matemáticas básicas que tendrán que utilizar en las otras asignaturas de matemáticas.

Considera que no es necesaria la introducción de situaciones contextualizadas, ya que la oportunidad de aplicar las matemáticas a situaciones de la vida real va a presentársele al alumno en otras asignaturas no matemáticas de la carrera. De todas maneras, termina aceptando que podrían incorporarse situaciones contextualizadas sencillas en las asignaturas de matemáticas, pero, preferentemente, no en las del primer nivel.

La posición que expresa este profesor es la más coherente con el significado pretendido en esta institución, que se puede resumir en el siguiente esquema:

- Primero, se proporciona una enseñanza formal y descontextualizada de las matemáticas.
- Después, la aplicación de las matemáticas a situaciones de la vida real es realizada en otras asignaturas no matemáticas de la carrera.

Ahora bien, en el cuestionario y en la entrevista, los otros cinco profesores se muestran partidarios de una secuencia alternativa que podría dar pie a la modificación del significado pretendido. Dicha alternativa sería la siguiente:

- Primero, se proporciona una enseñanza formal y descontextualizada de las matemáticas en la asignatura «Introducción a la Matemática».
- Después, se aplican las matemáticas a situaciones contextualizadas sencillas dentro de la misma asignatura «Introducción a la Matemática».

El análisis de las respuestas de los seis profesores permite llegar al siguiente resultado, el número nueve.

- *Resultado número nueve*: Los seis profesores se muestran partidarios de mantener primero el modelo de enseñanza formal y descontextualidado, para, después, pasar a las aplicaciones de las matemáticas a situaciones de la vida real –aunque discrepan sobre dónde introducir dichas aplicaciones. Esta discrepancia puede dar pie a un cambio del significado pretendido que implique la incorporación de situaciones contextualizadas a la asignatura «Introducción a las Matemáticas».

El resultado anterior se puede interpretar como la constatación de que estos profesores actúan en la práctica como si tuvieran un objeto personal sobre las matemáticas y su enseñanza es, en general, de tipo platónico.

> Una de estas concepciones, que fue común entre muchos matemáticos profesionales hasta hace unos años, considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Se supone que una vez adquirida esta base, será fácil que el alumno por sí solo pueda resolver las aplicaciones y problemas que se le presenten.
>
> Según esta visión no se puede ser capaz de aplicar las matemáticas, salvo en casos muy triviales, si no se cuenta con un buen fundamento matemático. La matemática pura y la aplicada serían dos disciplinas distintas; y las estructuras matemáticas abstractas deben preceder a sus aplicaciones en la Naturaleza y Sociedad. Las aplicaciones de las matemáticas serían un «apéndice» en el estudio de las matemáticas, de modo que no se producirían ningún perjuicio si este apéndice no es tenido en cuenta por el estudiante. Las personas que tienen esta creencia piensan que las matemáticas son una disciplina autónoma. Podríamos desarrollar las matemáticas sin tener en cuenta sus aplicaciones a otras ciencias, tan solo en base a problemas internos a las matemáticas. Esta concepción de las matemáticas se designa como «idealista-platónica». Con esta concepción es sencillo construir un currículo, puesto que no hay que preocuparse por las aplicaciones en otras áreas. Estas aplicaciones se «filtrarían», abstrayendo los conceptos, propiedades y teoremas matemáticos, para constituir un dominio matemático «puro» (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 16).

El siguiente paso de nuestra investigación fue preguntarnos si realmente era así. Es decir, nos planteamos averiguar qué prácticas discursivas formaban parte del significado de objeto personal que tenían los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza en general. En concreto, nos interesaba averiguar si en su discurso podíamos hallar argumentos propios de puntos de vista no «platonistas» sobre las matemáticas que pudieran también dar pie a un cambio del significado pretendido que implicara la incorporación de situaciones contextualizadas a la asignatura «Introducción a las Matemáticas» –como aplicación de la teoría previamente enseñada o como paso previo a la construcción de la teoría. Para ello, diseñamos el cuestionario del anexo III que fue contestado por diez profesores[5]. Se trata de un cuestionario de escala valorativa sobre las diferentes maneras de entender las matemáticas y las diferentes maneras de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se derivan de éstas. Para la elaboración de sus 30 ítems, utilizamos la clasificación propuesta en Font (2002).

Los 30 ítems se pueden agrupar de diferentes maneras para hacer aflorar conclusiones que, en el seminario de formación previsto en la segunda fase de la investigación, se pueden utilizar como argumentos de validez dudosa sobre los cuales reflexionar conjuntamente. A continuación, exponemos algunas de las agrupaciones que contemplamos y sus correspondientes conclusiones.

«PLATONISMO»

5.- El conocimiento matemático esencialmente es fijo e inmutable.

9.- Los objetos matemáticos son entidades ideales existentes objetivamente, diferentes de los árboles, las sillas, etc., y que podemos intuir merced a una cierta facultad intelectual.

10.- Los problemas que originaron las teorías matemáticas, si bien fueron importantes en su momento, no deben tener después un papel importante en su organización.

11.- Las representaciones de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente «neutras» ya que, en definitiva, son diferentes maneras de representar objetos matemáticos «ahistóricos».

23.- Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son construcciones mentales materializadas en signos.

Como puede observarse, los docentes se muestran moderadamente partidarios del platonismo. Por una parte, están en desacuerdo con la afirmación del ítem 5,

TABLA II

Grado de acuerdo con los enunciados del anexo III

PREGUNTA	T. Desacuerdo	Desacuerdo	Neutral	De acuerdo	T. acuerdo
5	5	3	2		
9	1	2	3	1	3
10	3	4	1		
11	1	3	2	3	1
23	1	5	1	2	1

(5) La mejora de las condiciones sociales y políticas de Venezuela en el momento de realizar este cuestionario permitió la participación de diez de los quince docentes de la institución.

pero, por otra, se muestran de acuerdo con la afirmación del ítem 9. También se muestran en desacuerdo con la afirmación del ítem 23, que niega la existencia de objetos matemáticos intemporales. Si bien podemos concluir que los docentes son partidarios de un cierto tipo de platonismo, se muestran en desacuerdo con una de las posibles consecuencias del punto de vista platónico: el olvido de los problemas que dieron lugar al descubrimiento de los objetos matemáticos. También resulta significativo que la mitad de los docentes se muestre de acuerdo con la idea de que las representaciones de los objetos matemáticos juegan un papel secundario.

Tal y como se refleja en la tabla III, los docentes suscriben el punto de vista formalista característico de la enseñanza de las matemáticas en las instituciones universitarias. Se muestran mayoritariamente de acuerdo con los ítems 14 y 15, y casi la mitad considera que para comprender un concepto matemático no son necesarias situaciones de referencia no matemáticas que le den sentido (ítem 17). Pero, por otra parte, se muestran en desacuerdo con ciertos aspectos relacionados con la enseñanza formalista de las matemáticas, como la enseñanza de las matemáticas centrada en ellas mismas (ítem 18) y descontextualizada (ítem 20). También son conscientes de la desmotivación que este tipo de enseñanza puede producir en los alumnos (ítem 20).

La combinación entre un cierto platonismo –en lo que se refiere a la existencia de los objetos matemáticos– y un cierto formalismo –en lo que atañe a la organización y presentación de las matemáticas– era un resultado esperado. Esto es lo que, en nuestra opinión, explica que los docentes se manifiesten en desacuerdo con afirmaciones de tipo «intuicionista» o «falibilista» y de acuerdo con afirmaciones de tipo convencionalista. En efecto, los docentes se muestran divididos cuando se habla acerca del principio básico del intuicionismo (ítem 21), ya que parecen estar más de acuerdo cuando este principio se aplica a los números naturales (ítem 22), pero esta aceptación desparece cuando la posición «construccionista» niega la existencia intemporal de los objetos matemáticos (ítem 23). Por otra parte, los docentes están claramente en desacuerdo con una visión empirista radical

TABLA III

Formalismo (enunciado de las preguntas en anexo III)

PREGUNTA	T. Desacuerdo	Desacuerdo	Neutral	De acuerdo	T. acuerdo
14	1	2	1	5	1
15	2	1	0	5	2
16	0	3	2	3	2
17	0	4	1	4	1
18	5	2	3		
19	0	1	1	5	3
20	2	6	2	0	2

de las matemáticas (ítem 12), pero este desacuerdo se reduce a la mitad cuando la tesis anterior se suaviza y se presenta formulada en términos cuasi-empiristas o «falibilistas», como en Lakatos (1981). El peso del formalismo explica, en nuestra opinión, que los docentes se manifiesten claramente de acuerdo con una afirmación de tipo convencionalista (ítem 30) formulada en términos propios de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (1987).

En cambio, esta mezcla de platonismo y formalismo no les lleva a recusar afirmaciones de tipo «constructivista» (ítems 26, 27 y 28), realizadas en los términos empleados por Piaget (1979) o de Lafoff y Núñez (2000), y con las cuales se muestran muy de acuerdo –incluso más de acuerdo que con las afirmaciones de tipo platonista o formalista. Ocho profesores están de acuerdo con los ítems 26 y 27, y la mitad con el ítem 28.

El análisis de esta parte del anexo III nos llevó a los siguientes resultados:

- *Resultado número diez:* Los docentes no tienen opiniones claras sobre la naturaleza de las matemáticas, más bien hacen suyas una mezcla de diferentes posiciones entre las que predomina una cierta mezcla de platonismo y formalismo.

- *Resultado número once*: La modulación de la enseñanza de las matemáticas que actualmente se realiza en la institución –primero las matemáticas y, después, en cursos posteriores, sus aplicaciones– no es el resultado de una posición meditada y reflexionada acerca de lo que son las matemáticas.

El análisis de las respuestas al anexo III también permite extraer otras conclusiones que pueden ser utilizadas en el seminario previsto para la segunda fase, relacionadas, por ejemplo, con la aplicabilidad y utilidad social de las matemáticas, y con el aprendizaje significativo y la contextualización.

Como puede apreciarse en la tabla IV, los docentes son conscientes de que las matemáticas son una ciencia que se aplica a la realidad y tiene una utilidad social. También se muestran de acuerdo con la afirmación de que esta característica tiene que estar presente en su enseñanza y que no es conveniente que se centre sólo en ellas mismas y permanezca muy alejada de las otras ciencias. Ahora bien, para

TABLA IV

Aplicabilidad y utilidad social de las matemáticas. Grado de acuerdo

PREGUNTA	T. Desacuerdo	Desacuerdo	Neutral	De acuerdo	T. acuerdo
1		2		2	6
2	1	2		2	5
14	1	2	1	5	1
18	5	2	3		
25	0	1	1	6	2
29	0	1	1	2	6

TABLA V

Aprendizaje significativo y contextualización. Grado de acuerdo

PREGUNTA	T. Desacuerdo	Desacuerdo	Neutral	De acuerdo	T. acuerdo
3	5	4	1	0	0
4	5	3	1	0	1
13	0	3	2	3	2
17	0	4	1	4	1
18	5	2	3	0	0
19	0	1	1	5	3
20	2	6	2	0	2

explicar la relación entre matemáticas y realidad se muestran tan partidarios de una explicación de tipo platónico-formalista (ítem 14), como de una explicación de tipo pragmatista (ítem 29).

Por su parte, la tabla V muestra que los profesores son conscientes de la importancia que tiene presentar situaciones contextualizadas para facilitar el aprendizaje del alumno y se manifiestan de acuerdo con las afirmaciones que van en este sentido –sobre todo si se formulan de manera muy general. Esta conclusión es coherente con la buena disposición a incorporar matemáticas contextualizadas detectada tanto en el cuestionario, como en la entrevista.

SEGUNDA FASE DE LA INVESTIGACIÓN

La segunda fase de la investigación consistirá en un seminario de formación que será coordinado por uno de los investigadores. El seminario se estructurará de la siguiente manera:

- resultados de la investigación didáctica sobre las funciones,
- resultados de la investigación didáctica sobre contextualización y modelización,
- análisis y valoración de diferentes secuencias didácticas que incorporan la «contextualización» y la «modelización» al estudio de las funciones,
- presentación de los resultados de la primera fase de la investigación,
- reflexión colectiva sobre la conveniencia o no de incorporar situaciones contextualizadas a la enseñanza de las funciones
- y, en el caso de llegar a un consenso sobre la necesidad de incorporar la contextualización a la enseñanza actual de las funciones, elaboración de una secuencia de actividades que incorpore la contextualización a la enseñanza de las funciones.

En esta segunda fase, que está en proceso de realización, se pretende primero proporcionar información a los profesores, para después presentar los resultados de la primera fase, y poner en duda su validez dando razones que, como mínimo, obliguen a cuestionar su veracidad. Finalmente, se pedirá a los docentes que argumenten con el fin de aceptar o recusar sus pretensiones de validez, para, así, poder llegar –o no– a un consenso en el seno la institución. Las sesiones del curso serán grabadas en video.

CONCLUSIONES FINALES

Esta investigación ha permitido obtener resultados teóricos, empíricos y metodológicos. Una de sus principales aportaciones es teórica: el desarrollo de la Teoría de las Funciones Semióticas para poder analizar tanto los objetos matemáticos y didácticos de los profesores, como el cambio en una institución. La primera parte de esta investigación también aporta resultados empíricos importantes:

- Permite afirmar que la enseñanza actual de las funciones en esta institución es formalista y descontextualizada.
- Pone en duda el argumento, considerado válido por algunos docentes, de que la matemática que se enseña en la asignatura «Introducción a las Matemáticas Analizar» puede ser aplicadas posteriormente por el alumno, con cierta facilidad, a situaciones contextualizadas.
- Lo que hace dudosa esta afirmación anterior es que los alumnos fracasan en este tipo de problemas, al igual que los mismos docentes que consideran válido el argumento anterior.
- La mayoría de los docentes tiene buena disposición para incorporar matemática «contextualizada» y «modelizada» al proceso de instrucción del objeto función. Su buena disposición se basa en argumentos emocionales –como que este tipo de situaciones motiva el alumno– y argumentos epistémicos –permite trabajar en situaciones similares a las que requerirán, posteriormente, que el alumno aplique sus conocimientos matemáticos.
- A pesar de la buena disposición manifestada, los docentes consideran que existen dos tipos de problemas a la hora de incorporar la enseñanza contextualizada de funciones. El primero tiene que ver con argumentos cognitivos –como la falta de recursos previos de los alumnos– y el segundo con argumentos «mediacionales» –como la falta de tiempo.
- La enseñanza de las funciones que actualmente se realiza en esta institución –se imparte primero la matemática y, después, ésta se aplica en cursos posteriores– no es el resultado de una posición clara sobre lo que son las matemáticas.
- Los docentes no tienen un punto de vista claro sobre las matemáticas, más bien incorporan en parte los postulados de diferentes posiciones entre las que se aprecia cierto predominio de una mezcla de platonismo y formalismo.

Hay que señalar que algunos de estos resultados son específicos del caso estudiado, pero otros van más allá de él. Se han obtenido resultados metodológicos importantes, entre los que destaca la elaboración del cuestionario de escala valorativa (anexo III) sobre las diferentes maneras de entender las matemáticas y las diferentes maneras de enfocar su enseñanza y aprendizaje derivadas de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

ARAVENA, M.: *Evaluación de proyectos en un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, 2001.

BORBA, M. C.; CONFREY, J.: «A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment», en *Educational Studies in Mathematics*, 31 (1996), pp. 319-337.

BOSCH, M.: *La dimensión ostentiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 1994.

BOSCH, M.; ESPINOZA, L.; GASCÓN, J.: «El profesor como director del proceso de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas», en *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23, 1 (2003), pp. 79-136.

BREIDENBACH, D.; DUBINSKY, E.; HAWKS, J.; NICHOLS, D.: «Development of the process conception of function», en *Educational Studies in Mathematics*, 23 (1992), pp. 247-285.

CHEVALLARD, Y.: «Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives aportées par une approche anthropologique», en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12, 1 (1992), pp. 73-112.

— «L'analyse des pratsiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique», en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 2 (1999), pp. 221-265.

DUBINSKY, E.: «Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking», en TALL, D. (ed.): *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Kluwer, 1991, pp. 95-123.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. (eds.): *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington D.C, MAA Notes 25, 1992.

DUBINSKY, E.: «Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria», en *Educación Matemática*, 8, 3 (1996), pp. 24-41.

FLECHA, R.; GÓMEZ, J.; PUIGVERT, L.: *Teoría sociológica contemporánea*. Piados, Barcelona, 2001.

FONT, V.: «Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f\,'(x)$. El caso de la función seno», en *UNO*, 25 (2000), pp. 21-40.

— «Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola», en *Revista EMA*, 6, 2 (2001), pp. 180-200.

— «Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática», en *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.* En prensa (2003).

FUENTE DE LA, M.; ARANDA, D.: «Sobre gráficas y funciones en la ESO», en *UNO*, 2 (1994), pp. 109-119.

GARCÍA, F. J.: «Funciones de la calculadora gráfica», en *UNO*, 2 (1994), pp. 103-108.

GARCÍA, M.; LLINARES, S.: «Algunos referentes para analizar tareas matemáticas», en *Suma*, 18 (1994), pp. 13-23.

GODINO, J. D.: «Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática», en *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 22, 2/3 (2002), pp. 237-284.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.: «Significado institucional y personal de los objetos matemáticos», en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3 (1994), pp. 325-355.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V.: *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Granada, Universidad de Granada, 2003.

http://es.groups.yahoo.com/group/edumat-maestros.

GOMEZ, J.; FORTUNY, J.: «Contribución al Estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las Matemáticas en Escuelas Universitarias», en *UNO*, 32 (2003), pp. 7-23.

HABERMAS, J.: *Teoría de la acción comunicativa*. Madrid, Taurus, 1987.

INGLADA, N.; FONT, V.: «Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental», *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*. Boletín núm. 15. Córdoba, 2003, pp. 1-18. http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/boletin15.htm.

JANVIER, C.: «Translation processes in mathematics education», en JANVIER, C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum AP, 1987, pp. 27-32.

LAKATOS, I.: *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid, Alianza Editorial. 1981.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R.: *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, Basic Books, 2000.

LLINARES, S.: «Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación», en *Revista UNO*, 17 (1998), pp. 51-63.

LUHMANN, N.: *Sistemas sociales. Lineamientos para una teoría general*. Barcelona, Anthropos, 1998.

MARCELO, C.: «La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar», en ANDRÉS PREAFÁN, G.; ADÚRIZ-BRAVO, A. (comp.): *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional/Colciencias, 2002, pp. 45-60.

MARTINEZ, M.: *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.

MORENO, M.: *El Profesor Universitario de Matemáticas. Estudio de las Concepciones y Creencias Acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 2001.

MORENO Y AZCÁRATE: «Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales», en *Enseñanza de las ciencias*, 21, 2 (2003), pp. 265-280.

NÚÑEZ, J. M.; FONT, V.: «Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas. Una aproximación histórica», en *Revista de Educación*, 306 (1995), pp. 293-314.

PIAGET, J. «Los problemas principales de la epistemología de la matemática», en PIAGET, J. (comp.): *Epistemología de la matemática*. Buenos Aires, Paidós, 1979, pp. 147-182.

REEUWIJK, V.: «Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas», en *Revista Uno*, 12 (1997), pp. 9-16.

ROMBERG, T.; CARPENTER, T.; FENNEMA, E.: *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum, 1994.

RUTHVEN, K.: «The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms», en *Educational Studies in Mathematics*, 21 (1990), pp. 431-450.

SCHÜTZ, A.: *La construcción significativa del mundo social*. Barcelona, Paidós, 1993.

SCHWARTZ, B.; DREYFUS, T.: «New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions», en *Educational Studies in Mathematics,* 29 (1995), pp. 259-291.

SFARD, A.: «On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin», en *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1991), pp. 1-36.

— «Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function», en DUBINSKY, E.; HAREL, G. (eds.): *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington D. C, MAA Notes 25, 1992, pp. 59-84.

SKOVSMOSE, O.: *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht, Kluwer A.P., 1994.

SLAVITT, D.: «An alternative route to the reification of function», en *Educational Studies in Mathematics*, 33 (1997), pp. 259-281.

VALERO, P.: «Deliberative mathematics education for social democratización in Latin America», en *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 98, 6 (1999), pp. 20-26.

WITTGENSTEIN, L.: *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid, Alianza Editorial, 1987.

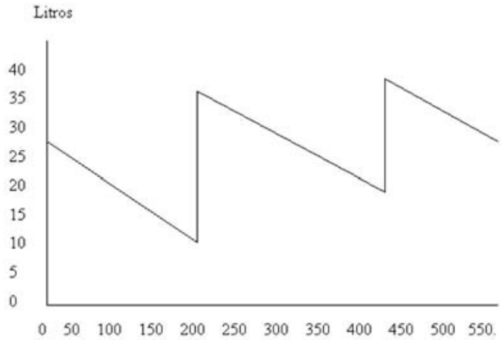
ANEXO I

1) Hemos de cambiar los vidrios de una ventana cuadrada. El precio del vidrio es de 120 Bolívares/ mts^{2}.

a) Cuánto costará el vidrio de una ventana cuadrada que mide 7 metros de lado? ¿Y cuál será el costo para una ventana de 5 metros de lado?
b) Elabora una tabla ordenada de valores que relacionen el costo de la ventana con la longitud del lado de la ventana.
c) Diseña una fórmula que te permita calcular directamente el costo de la ventana conociendo la longitud del lado de la ventana.
d) Traza la gráfica correspondiente. ¿Qué tipo de gráfica obtienes? ¿Por qué?
e) ¿Qué opinas acerca de este tipo de problema?
f) ¿En que lugar del currículo de la asignatura crees que se podría colocar?
g) ¿Crees que este tipo de problema sería de utilidad para los alumnos?
h) ¿Qué aspecto novedoso, según tu opinión, presenta este tipo de problemas con relación al programa de la asignatura?
i) ¿Qué dificultades crees podrían presentarse con la incorporación de este tipo de problemas al currículo de la asignatura?

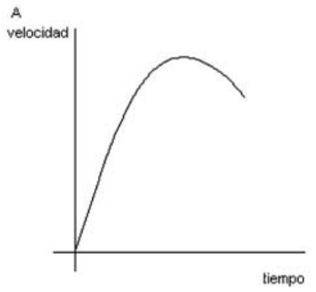
- Relacionadas con el alumno
- Relacionadas con la asignatura
- Relacionadas con la organización de la Cátedra

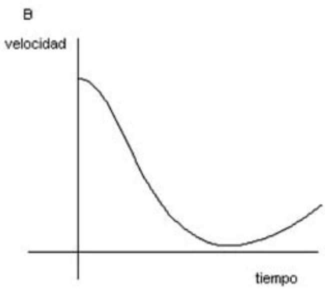
2) La gráfica representa la cantidad de gasolina que hay en el depósito de un automóvil durante un viaje.



a) ¿Cuántos litros hay en el depósito en el momento de la salida? ¿Y en el de llegada?
b) ¿En qué kilómetro se le colocó gasolina al tanque?
c) ¿Cuántos litros consumió durante el viaje?
d) ¿La gráfica observada la consideras una función? ¿Por qué?
e) Construye otro gráfico, buscando otra variable para el eje de las abscisas, relacionada con la situación de manera que la gráfica obtenida sea una función.
f) ¿Qué diferencia hay entre este gráfico y el anterior?
g) ¿Qué opinas acerca de este tipo de problema?
h) ¿Lo utilizarías en el programa de la asignatura «Introducción a la Matemática»?
i) ¿En qué lugar del currículo de la asignatura crees que se podría colocar?

3) Queremos representar una gráfica para describir la variación de velocidad que experimenta una pelota de baloncesto en un lanzamiento de tres puntos, desde el momento en que sale de las manos del jugador hasta que llega a la canasta.





a) ¿Cuál de las dos gráficas siguientes crees que es más correcta? ¿Por qué?
b) ¿Cuál crees sea la gráfica que escogen los alumnos?
c) Crees que una gran mayoría de tus alumnos acertaría la respuesta más apropiada en un:

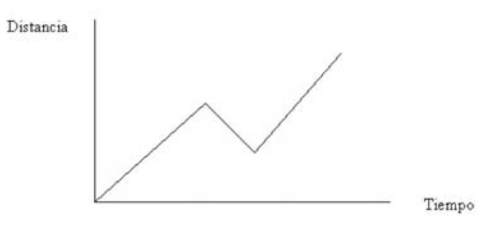
El 100%	
Menos de 100% pero más de 50%	
Menos de 50% pero más de 25%	
Menos de 25% pero más de 10%	
Menos de 10%	

d) ¿Por qué crees que los alumnos harían esta elección?

4) a) Lee con atención el siguiente diálogo y señala qué alumno no ha contestado bien la pregunta formulada y cuál es la causa de su error.

Una profesora imaginaria presenta una gráfica a sus alumnos y les plantea la siguiente pregunta:

Profesora: ¿Pueden decirme qué creen que representa la gráfica?



Respuesta de los alumnos:

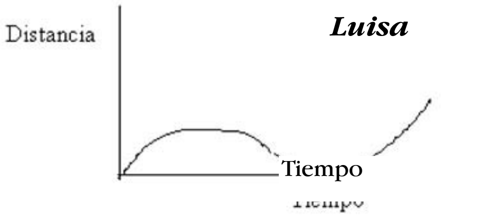
*Alberto***:** Que subes a una montaña, a continuación bajas un poco y después vuelves a subir.
Ramón: Que sales de un punto, tuerces dos esquinas y después sigues adelante.
*Ana***:** Sales de un punto, al cabo de un rato vuelves hacia atrás un momento y después te alejas de nuevo del punto de salida.

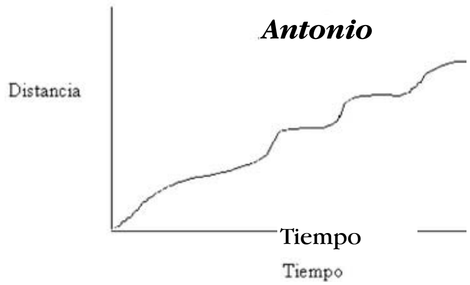
b) ¿Cuál, según tu criterio, es la interpretación más apropiada de la gráfica? ¿Por qué?
c) ¿Cómo han interpretado la gráfica los alumnos que responden incorrectamente?

5) Luisa y Antonio explican su camino al trabajo

Luisa: He venido en moto, pero a medio camino me he dado cuenta de que me había dejado unos documentos y

he vuelto a buscarlos. Después he tenido que darme prisa para poder llegar puntal.
Antonio: Mi padre me ha traído en su carro. Al principio el tráfico era fluido pero después nos hemos encontrado con sinfín de semáforos en rojo.





a) ¿Según tu opinión, crees que las gráficas anteriores traducen el camino al trabajo de Luisa y Antonio?
b) ¿Este tipo de actividades te parece interesante? ¿Qué aspecto novedoso introducen?
c) ¿Qué dificultades crees podrían presentarse con la incorporación de este tipo de problemas al currículo de la asignatura?

– Relacionadas con el alumno
– Relacionadas con la asignatura
– Relacionadas con la organización de la Cátedra

6) Un Paracaidista salta del avión en caída libre durante un tiempo, después del cual abre su paracaídas. La siguiente tabla representa las distancias del hombre al avión cada medio segundo.

Tiempo (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Distancia al avión (m)	0	1	4	9	16	25

(sigue)

(continuación)

Tiempo (s)	3	3,5	4	4,5	5	5,5
Distancia al avión (m)	36	42	46	49	52	55

a) Elabora una gráfica que describa el movimiento graduando el eje de ordenadas de manera que la separación entre las marcas represente 5 metros; y el eje de abscisas de manera que la separación entre las marcas represente 0,5 segundos.
b) ¿En qué instante abrió el paracaídas?
c) ¿Cómo explicas que la gráfica vaya subiendo si el hombre va cayendo?
d) ¿Crees posible que, problemas como este, tengan cabida en el programa de la asignatura «Introducción a la Matemática»?
e) ¿Esta forma de enfocar la asignatura te parece interesante?
f) ¿Qué aspecto novedoso, introducen al programa actual?
g) ¿Qué dificultades crees podrían presentarse con la incorporación de este tipo de problemas al currículo de la asignatura?

- Relacionadas con el alumno
- Relacionadas con la asignatura
- Relacionadas con la organización de la Cátedra

h) ¿Qué contenidos se le debería agregar o quitar al currículo actual para incorporar este tipo de problemas?

7) a) La altura y el peso de cinco estudiantes se reflejan en la tabla siguiente:

Altura (cm)	160	165	180	170	170
Peso (Kg)	55	56	70	68	80

Traza la gráfica que te permita relacionar la altura con el peso.

b) La relación entre la edad de Juan y su peso aparece en la siguiente tabla:

Edad (años)	10	12	14	16	18
Peso (Kg)	40	45	48	50	52

Elabora la gráfica que relaciona la edad con el peso de Juan.

c) Observa detenidamente las actividades de los dos apartados anteriores ¿En qué unidad programática del currículo se pueden colocar y qué tema específico del programa crees que traten?

d) ¿Qué opinión te merecen este tipo de problemas?

f) ¿En que lugar del currículo de la asignatura crees que se podrían colocar?

g) ¿Crees que este tipo de problemas pueden ser de utilidad para el aprendizaje de algún contenido de la asignatura «Introducción a la Matemática»?

8) El precio de venta de la leña en un almacén es de:

a) Traza la gráfica de la Función. ¿ Es continua? ¿Por qué?

b) ¿Cuánto costará la compra de 35 Kg., de 60 Kg. y de 120 Kg. de leña?

c) Escribe una fórmula que te permita determinar el costo de la compra según la cantidad que quieras comprar.

d) Después de mirar los precios, una persona que necesitaba comprar sólo 45 Kg de leña decide comprar 51 Kg. de leña. ¿Por qué crees que ha hecho esto?

CANTIDAD COMPRADA EN (KG)	**Precio por Kg. (Bs./Kg.)**
Menos de 50	12
Más de 50 y menos de 100	10
Más de 100	8

e) ¿Qué opinión tienes en referencia a este tipo de problema?

f) ¿Crees que serían de utilidad para el aprendizaje de algún contenido de la asignatura «Introducción a la Matemática»?

g) ¿En que parte del programa lo colocarías?

ANEXO II

Guión de la entrevista semi-estructurada:

- ¿Qué grado de dificultad crees que tienen para los alumnos estos problemas?
- ¿Cuáles crees que son las dificultades que tendrán los alumnos para resolverlas?
- ¿A pesar de las dificultades que has comentado, crees que son lo suficientemente interesantes como para incluirlos en el currículum?
- ¿Crees qué el grado de dificultad sea un obstáculo para introducir este tipo de problemas?
- ¿Crees qué es factible introducir de manera sistemática estos problemas en el currículum de la asignatura? ¿Por qué?
- ¿Qué unidad o aspecto del programa de la asignatura se puede suprimir para dar cabida a este tipo de problemas?
- ¿Crees que con este tipo de matemáticas contextualizadas los alumnos harán preguntas del tipo: Para qué sirve esto?
- ¿Te parece que esta forma de aprendizaje de la matemática puede ser más interesante y agradable para los alumnos?
- ¿Ya conocías esta forma de trabajar las matemáticas o te resulta novedosa?
- Califica, según tu opinión, cada apartado de los ocho problemas con la siguiente escala: totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, neutral, de acuerdo, totalmente de acuerdo.

ANEXO III

A continuación se te ofrecen una serie de enunciados, indica tu grado de aceptación, en cada caso, según el siguiente convenio:

1	Totalmente en desacuerdo
2	En desacuerdo
3	Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo)
4	De acuerdo
5	Totalmente de acuerdo

1. Las matemáticas son esencialmente un conjunto de conocimientos (hechos, reglas, fórmulas y procedimientos) socialmente útiles.
2. Las matemáticas son esencialmente una manera de razonar y resolver problemas.
3. Se supone que las matemáticas no tienen que tener significado.
4. Las matemáticas implican principalmente memorización y seguimiento de reglas.
5. El conocimiento matemático esencialmente es fijo e inmutable.
6. Las matemáticas están siempre bien definidas, no están abiertas a cuestionamientos, argumentos o interpretaciones personales.
7. La habilidad matemática es esencialmente algo con lo que se nace o no se nace.
8. Los matemáticos trabajan típicamente aislados unos de otros.
9. Los objetos matemáticos son entidades ideales existentes objetivamente, diferentes de los árboles, sillas, etc., que podemos intuir merced a una cierta facultad intelectual.

10. Los problemas que originaron las teorías matemáticas, si bien fueron importantes en su momento, no deben jugar después ningún papel importante en su organización.
11. Las representaciones de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente «neutras» ya que en definitiva son diferentes maneras de representar objetos matemáticos «ahistóricos».
12. Las matemáticas es una ciencia que depende de las «cosas» como los árboles, sillas, etc. exactamente igual a como dependen de ellas las ciencias experimentales.
13. En la enseñanza de las matemáticas hay que rechazar la manipulación formal de símbolos escritos en beneficio de las experiencias físicas subyacentes que les correspondan. Sólo éstas pueden dar sentido a las manipulaciones simbólicas y proporcionar un significado intuitivo a las conclusiones que se obtengan.
14. Las matemáticas son verdades que no dependen de la experiencia, aunque la experiencia puede ser muy útil para descubrirlas.
15. Las dificultades que se producen en el aprendizaje de las matemáticas son causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática preuniversitaria (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducen en el alumno una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa.
16. Las matemáticas que se presentan como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente permiten poner de manifiesto al alumno la ordenación lógica de la materia, pero, al presentar el producto terminado, impeden la acción, las conjeturas, la imaginación, la aplicación a situaciones de la vida cotidiana, etc.
17. Para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia no matemáticas que le den sentido.
18. Conviene presentar unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias.
19. Si los textos didácticos ofrecen pocas situaciones no matemáticas que permitan a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, se facilita preguntas del tipo «esto para qué sirve».
20. Conviene presentar los conceptos matemáticos de la manera más general posible y separados de los contextos que les dan sentido, para así evitar las dificultades de comprensión que la presentación contextualizada pudiese producir.
21. Estás de acuerdo con el principio de construcción o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático, el cual afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo de construcciones mentales.
22. Los números naturales se construyen inmediatamente en la mente del sujeto y su verdad se basa en la evidencia de la intuición.
23. Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son

construcciones mentales materializadas en signos.

24. Las matemáticas es una ciencia que presenta las mismas características que las ciencias empíricas. Es decir, que también son falibles, y que también se desarrollan gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión.
25. Se debe enseñar las matemáticas a partir de la resolución de problemas y hacer ver a los alumnos que las matemáticas se pueden aplicar a situaciones de la vida real.
26. La esencia del pensamiento matemático es la universalidad y la necesidad, y cualquier sujeto, como resultado del proceso evolutivo de especie, está biológicamente preparado para desarrollar un pensamiento matemático universal y necesario.
27. El conocimiento matemático es una construcción que no es una invención ni un descubrimiento. Pero que, en cierta manera, esta construcción tiene algo de descubrimiento, ya que, como resultado de un proceso evolutivo de la especie, todos estamos en condiciones de construir el mismo conocimiento; y también hay algo de invención porque las construcciones matemáticas pueden ir en distintas direcciones.
28. Las matemáticas son el resultado de la experiencia humana pero no es el resultado de puras convenciones sociales, ya que por razones de tipo evolutivo todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las matemáticas.
29. Las matemáticas son un producto histórico que se consideran universales y necesarias porque han resultado útiles para organizar nuestro conocimiento de las «cosas» de nuestra experiencia.
30. La verdad, certeza o «necesidad» matemática no es más que el «estar de acuerdo» con el resultado de seguir una regla que forma parte de las prácticas matemáticas.