

La transferencia de aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción

The transfer of algorithmic learning and the origin of errors in subtraction

Ana B. Sánchez

Universidad de Salamanca, Departamento de Didáctica, Organización y Métodos de Investigación. Salamanca, España.

Ricardo López Fernández

Universidad de Salamanca, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Salamanca, España.

Resumen

Los resultados de la investigación que presentamos demuestran que la influencia del conocimiento formal, intuitivo y procedimental en el proceso de aprendizaje algorítmico; el contexto pedagógico del aula y el proceso de transferencia del conocimiento matemático son decisivos en la generación del error que se nutre de mecanismos de transferencia analógica. Específicamente, hemos estudiado este hecho en el algoritmo de la sustracción. En este artículo analizamos las respuestas emitidas por nueve niños/as de edades comprendidas entre siete y diez años, en una prueba compuesta por 20 sustracciones. En total, fueron grabados los procesos ejecutados por los nueve niños/as en 180 restas. Los datos obtenidos a través de protocolos en voz alta, fueron analizados con ayuda del programa estadístico *Nud*ist 4.0*. El estudio que presentamos, se inscribe en una investigación en la que hemos analizado una base de datos de 7.140 restas realizadas por 357 niños/as de edades comprendidas entre siete y trece años, al objeto de determinar si producían errores sistemáticos y conocer su tipología.

En este artículo, evidenciamos como los errores, se focalizan en torno a determinados factores de la tarea relacionados con la comprensión de conceptos esenciales para el aprendizaje significativo de la habilidad. Lo último, opinamos es esencial para ayudar a los profesores en la programación didáctica de la enseñanza del algoritmo de la sustracción y en la práctica metodológica específica a aplicar en el aula; pues contribuyen a clarificar

la naturaleza de los procesos algorítmicos y la generación del error en la sustracción. Finalmente, demostramos la importancia de los factores contextuales, como el lenguaje utilizado en el proceso de enseñanza. Lo anterior, es debido a que los niños/as al iniciar el aprendizaje construyen algunas interpretaciones sobre el procedimiento, en base a una serie de conceptos o vocabulario específico organizado dentro del campo conceptual de la sustracción.

Palabras clave: aprendizaje algorítmico, transferencia del conocimiento algorítmico, educación primaria, errores en la sustracción, aproximación semántica al error, educación matemática, destrezas de la sustracción.

Abstract

The results of the study presented in this paper demonstrate that the influence of formal, intuitive and procedural knowledge in the process of algorithmic learning, the pedagogical context of the classroom and the process of transferring mathematical knowledge are decisive in error generation through mechanisms of analogical transfer. The paper reports this fact in the subtraction algorithm. The answers given by nine children of ages between seven and ten years in a test made up of 20 subtraction problems were analysed. Altogether, the processes executed by the nine children were recorded in 180 subtraction operations. The volume of data obtained via talk-aloud protocols was analysed with the help of the Nud*ist 4.0 statistical program. The study falls within the context of a larger study where the authors analysed a database of 7,140 subtraction operations performed by 357 children between the ages of seven and thirteen years, with the aim of determining whether systematic errors occurred and typing any systematic errors found.

The article shows how the errors most commonly found cluster around certain factors of the task. These factors are related to the understanding of essential concepts for the meaningful learning of the ability. In the authors' opinion, it is essential to help teachers plan how to teach the subtraction algorithm and provide teachers with a specific methodological practice to apply in the classroom; these things would help make the nature of algorithmic processes clearer and reduce error generation in subtraction. Lastly, the paper demonstrates the importance of contextual factors, such as the language used in the teaching process. When children begin learning, they build interpretations of the procedure, based on a series of concepts or specific vocabulary organised within the conceptual field of subtraction.

Key words: algorithmic learning, transfer of algorithmic knowledge, primary education, subtraction errors, semantic approach to error, mathematical education, subtraction skills.

Introducción¹

Para abordar eficientemente la naturaleza de los errores en el algoritmo de la sustracción, hemos de tener en cuenta los resultados de algunas de las investigaciones relevantes en este campo de estudio. Dos líneas teóricas, han profundizado de manera notable en el mismo. Por una parte, la aproximación sintáctica, relacionada con la «Teoría de VanLehn», que aporta un exhaustivo análisis sobre los mecanismos procesales que rigen la generación de los errores sistemáticos, *Bugs algorithmic*², (Brown y Burton 1978; Brown y VanLehn, 1982; VanLehn y Brown 1980; VanLehn, 1982, 1983, 1987, 1990; Young y O´Shea, 1981, López y Sánchez, 2006).

Por otra parte, la línea de investigación que ha valorado la importancia de la adquisición de los componentes conceptuales que gobiernan los procedimientos algorítmicos. En esta última, destacan entre otros, autores como Fuson (1986, 1992a, 1992b); Fuson y Briars (1990); Hiebert y Lefevre (1986); Hiebert y Warne (1996); Ohlsson y Rees (1991); Resnick (1982, 1983); Resnick y Omanson (1987); que inciden en la comprensión de los principios que sustentan el procedimiento como primer objetivo de aprendizaje. Esta última aportación, también está relacionada con otras investigaciones que han centrado sus estudios en las estructuras semánticas de los problemas que se resuelven mediante operaciones algorítmicas, y la influencia de este componente semántico en el proceso de solución de los mismos (Carpenter y Moser, 1982, 1983; Neshet, 1976; Neshet et al., 1982, Neshet y HersHKovitz, 1994; Neshet y Katriel, 1977; Orrantía, 2003).

Si delimitamos el campo de estudio y nos situamos en la influencia de las estructuras semánticas en las operaciones o procedimientos aritméticos; no podemos obviar las aportaciones de Fischbein. Este autor, en sus investigaciones informa sobre la importancia de la interpretación semántica del procedimiento algorítmico en la generación de errores en problemas de división y multiplicación (Fischbein et al., 1985).

⁽¹⁾ Los autores quieren agradecer al C.I.T.A. (Centro Internacional de Tecnologías Avanzadas, <http://www.citafigs.org/cita/>) de la Fundación Germán Sánchez Ruipérez, el apoyo recibido a lo largo del desarrollo de esta investigación.

⁽²⁾ *Bugs algorithmic*. Término tomado por los autores del lenguaje de programación informática, donde un proceso erróneo es un proceso correcto con una o más pequeñas perturbaciones, o agujeros, instalados en él (Brown y Burton, 1978; Burton 1982; VanLehn 1982).

Influencia del componente intuitivo en el contexto de aprendizaje

Para Fischbein (1987, 1994, 1999), los aspectos interpretativos son esenciales en la producción del error en la sustracción multicolumna. Su teoría, propone tres componentes relevantes que confluyen en el espacio de resolución de los algoritmos: el formal, el algorítmico y el intuitivo. La interactuación de los tres componentes es parte del proceso de aprendizaje del mismo; pero algunas veces, el componente intuitivo llega a manipular al componente formal-«procedural», ocasionando perturbaciones que generan errores (Fischbein, 1994). Es decir, al igual que Thorton (1998), hablamos de factores contextuales y de factores de la tarea.

En relación a los factores de tarea, otro aspecto importante a considerar en el aprendizaje del algoritmo, es que el niño cuenta con una serie de esquemas relacionales y los conceptos integrados en tal conocimiento aritmético. En el ámbito de la resta son: *Comparación*, mediante el cual los niños/as disponen de una serie de términos como más, menos, menor que; *Aumento-disminución* que permiten a los niños/as determinar cambios en la cantidad y; *Parte-todo*, que permite dividir el todo en partes más pequeñas. El último esquema, que hemos denominado «parte-todo», es considerado como un esquema sofisticado mediante el cual el niño/a percibe las cantidades por separado y también como partes de un todo, lo que le permite realizar conexiones pertinentes entre adición y sustracción (Baroody et al. 1983; Resnick, 1983; Van De Walle, 1990).

Junto a la existencia de estos esquemas, desempeñan un papel relevante el docente y la metodología didáctica que potencian los aspectos intuitivo-formales y procesales que facilitarán la transferencia de aprendizaje. De acuerdo con Fischbein (1987, 1999), suscribimos la idea que gira en torno a la influencia decisiva del contexto en la prevención de errores en el algoritmo de la resta.

Así pues, desde nuestro punto de vista, tanto los aspectos formales como son los valores convencionales del sistema posicional, los esquemas estructurales y el vocabulario utilizado en los mismo; junto a las consiguientes interpretaciones que el niño/a hace del procedimiento en el inicio del aprendizaje, constituyen los recursos de transferencia negativa que emplean los niños/as, bien espontáneamente, o inducidos por determinadas situaciones de enseñanza.

Transferencia del conocimiento algorítmico

Varios autores diferencian actualmente entre la transferencia positiva y la transferencia negativa (Mayer, 1992). La transferencia positiva ocurre cuando la experiencia y el conocimiento previo facilitan, apoyan, y refuerzan el proceso de resolución de nuevos problemas o aprendizajes. En caso contrario, cuando el conocimiento previo, entorpece los procesos resolutivos, estamos ante una transferencia negativa que constituiría un obstáculo para comprender la estructura organizada de todos los pasos que componen el algoritmo.

Las ideas anteriores dirigen nuestra atención, al proceso de transferencia del conocimiento procedimental en matemáticas.

Para Hiebert y Lefevre (1986), tal proceso potencia la relación entre conocimiento conceptual y procedimental, tan importante en la adquisición del algoritmo. Algunos autores como, Brown y Clement (1989); Clement (1993); Duit, (1991); Gentner et al. (1997); Gentner et al. (2003); Thagard, (1992); Sander, (2001); VanLehn (1986, 1990); Zook (1991); Zook y DiVesta (1991); han estudiado los mecanismos de transferencia de conocimiento y admiten la analogía como el recurso más utilizado por los niños/as durante el proceso.

Según Gentner et al. (1997), el proceso de transferencia analógico, consistiría en una alineación estructural entre dos representaciones mentales, con el objetivo de encontrar la máxima consistencia entre ellas. Este proceso se beneficia de la práctica continuada, que facilita a través de los ejemplos, diversidad de situaciones que permiten establecer una relación comprensiva entre los aspectos formales y procesales del algoritmo. Así, cuando un niño/a activa las relaciones estructurales profundas entre los ejemplos, requiere que reconozca las estructuras de ejemplos resueltos, en otras ocasiones.

En el espacio algorítmico, la analogía por su naturaleza comparativa promueve el aprendizaje de manera significativa; ya que los niños/as construyen significado en la búsqueda de relaciones entre lo nuevo y lo experimentado.

La otra cara de la moneda, es que en ocasiones, las analogías pueden ser una importante fuente para los errores cuando no existe una correspondencia total entre las estructuras Fischbein (1987). Es decir, según lo anterior, las analogías pueden jugar varios papeles. Por una parte, promueven el aprendizaje significativo a través de la relación de las estructuras de conocimiento necesarias. Por otra parte, pueden generar errores en el aprendizaje a través de utilización de analogía negativa. Esta última, ocurre cuando el niño/a acude al uso de una analogía

mecánicamente, sin considerar si la información analógica es significativa (Orgill y Bodner, 2003).

Algunos autores indican que es común en el aula de matemáticas, que los profesores introduzcan los algoritmos apoyándose en los libros de texto que interfieren en la transferencia del conocimiento aritmético (Fuson, 1992b). Hablaríamos entonces de transferencia negativa, fundamentada en malas prácticas educativas.

En el ámbito de la resta, el error *always-borrow-left* –robar siempre de la columna situada más a la izquierda–, es explicado por VanLehn (1990), a través de los recursos de enseñanza utilizados por el docente o los libros de texto que, en ocasiones, emplean ejemplos que utilizan restas con dos columnas para enseñar la resta multicolumna.

Kamii (1985, p. 215), considera que el empleo de procedimientos utilizados por los profesores durante la instrucción, usualmente aprendidos de memoria por los niños/as, conducen a errores sistemáticos en el aprendizaje del algoritmo de la sustracción. Un ejemplo de ello, es la enseñanza del cero como conjunto vacío de elementos. En este contexto didáctico, algunas veces podemos encontrar que los docentes utilizan expresiones como: «cero no tiene nada», «en el cero no hay nada», que el niño traslada a todos los ceros que encuentra en el algoritmo sin tener en cuenta el significado del valor posicional del dígito dentro de las cifras.

Por tanto, no debemos olvidar el aspecto contextual del aula, que influye decisivamente en la adquisición del proceso y también de los errores que se producen en el mismo.

El componente formal

A lo largo del artículo, mostraremos como estas estructuras conceptuales y las primeras interpretaciones de la práctica o desempeño algorítmico que construyen los niños/as al iniciar el aprendizaje, son de especial relevancia. Para ello, tomaremos como ejemplo el error *Smaller -from-larger*³, que los

³ En la literatura científica que aborda el tema, se utiliza el concepto *Smaller-from-larger* sin traducción. Este error se produce cuando el estudiante ante una sustracción donde el dígito del minuendo es menor que el dígito del sustraendo, no roba y sustrae el dígito más pequeño del más grande en cada columna sin tener en cuenta si el más grande se encuentra en el minuendo. Ejemplo: $81-38=57$.

niños/as cometieron con mayor número de frecuencias en nuestra investigación. Con este objetivo, estudiamos dos fuentes de transferencia negativa en la resolución de sustracciones multicolumna con llevada. Una serie de esquemas que se encuentran en la base de la estructura conceptual de la sustracción, y sirven para establecer relaciones entre las cantidades que componen la operación. Estos esquemas conceptuales, son: «Quitar una parte del todo» y «Recorrer una distancia» (Resnick, 1983). Sander (2001) los denominó *Distance and Remove*. Además analizamos la interpretación semántica del cero, y su influencia en el origen del error.

La investigación

Objetivos

Para comprobar los postulados mencionados anteriormente, diseñamos dentro de una investigación más amplia⁴ un «estudio piloto», cuyos resultados describimos en este artículo.

Objetivo primero: analizar la naturaleza semántica de los errores en la resta con llevadas.

Objetivo segundo: detectar fuentes de transferencia analógica negativa en la producción del error en la resta con llevadas.

Contexto

Se enmarca dentro de una investigación más amplia ya publicada en *Revista de Educación*, 344. Septiembre-diciembre 2007, pp. 377-402. Para el «Estudio Piloto» que describimos en este artículo, tomamos como referencia uno de los centros que denominamos (2), en López, R.; Sánchez, A. B. (2007). Este colegio está

⁽⁴⁾ Investigación descrita en su primera parte en el artículo publicado en *Revista de Educación*, 344. Septiembre-diciembre 2007, pp. 377-402. En dicho artículo informamos sobre los resultados obtenidos en torno a la adquisición conceptual del procedimiento de la sustracción, la tipología y estabilidad de los errores que cometen los niños/as-as en este algoritmo y las relaciones entre el conocimiento conceptual y procesal en la producción del error.

situado en zona de montaña de la provincia de Salamanca. Cumple con una característica particular, debido al escaso número de niños/as escolarizados, estos son instruidos por el mismo profesor desde el inicio de la escolaridad, donde se configuran las estructuras conceptuales de los números.

Por otra parte, en el estudio transversal de los errores cometidos en este colegio a lo largo de los cursos 2.º, 3.º, 4.º, 5.º y 6.º, habíamos observado que eran mayoritariamente de origen semántico (López y Sánchez, 2007), pero quisimos estudiar con más profundidad la naturaleza de los mismos y la influencia del fenómeno de la transferencia en su generación.

Muestra

A una muestra de nueve alumnos de Educación Primaria, con edades comprendidas entre siete y diez años, se les pasó la prueba de las 20 restas de VanLehn (1990, p. 170). Según el autor, el test había sido cuidadosamente diseñado para obtener diferentes errores (VanLehn, 1990, p. 193).

Seleccionamos a nueve niños/as ($V = 5$; $H = 4$), situados en la primera fase de aprendizaje del algoritmo, (cursos 2.º, $N = 2$ (edad: 6-7 años); 3.º, $N = 4$ (edad: 7-8 años); 4.º, $N = 3$ (edad: 8-9 años) fueron testados de nuevo con la prueba de las 20 restas (VanLehn, 1990, p. 170), y explicaron verbalmente como resolvieron cada una de las restas.

Los informes verbales fueron grabados individualmente y transcritos en una hoja de registro con los instrumentos que a continuación se exponen.

Metodología

Utilizamos un protocolo de transcripción de verbalizaciones, al cual trasladamos las secuencias de resolución de las restas que fueron grabadas a los niños/as en cada una de las 20 restas. Esto nos permitió describir las habilidades cognitivas y vocabulario implicados en la solución del algoritmo (Olhson y Langley 1988, p. 47).

Para el análisis de los datos obtenidos a través de las grabaciones, recurrimos a una metodología cualitativa, que nos permitió estudiar el lenguaje natural utilizado en los procesos de resolución de las restas. Empleamos el programa

informático *Sound Scriber*, para convertir en textos las grabaciones efectuadas a cada uno de los niños/as.

Al objeto de reducir el volumen de datos, elaboramos un conjunto ordenado de información, presentada de forma operativa. Para determinar la conceptualización semántica del cero y la existencia o no de las fuentes de transferencia definidas por Sander, (2001): *Remove and Distance* (Quitar y Distancia) en los textos, y cuál de estas era la más utilizada por los niños/as de la muestra, transformamos los datos obtenidos a través de las grabaciones con el programa informático *Nud*ist 4.0*.

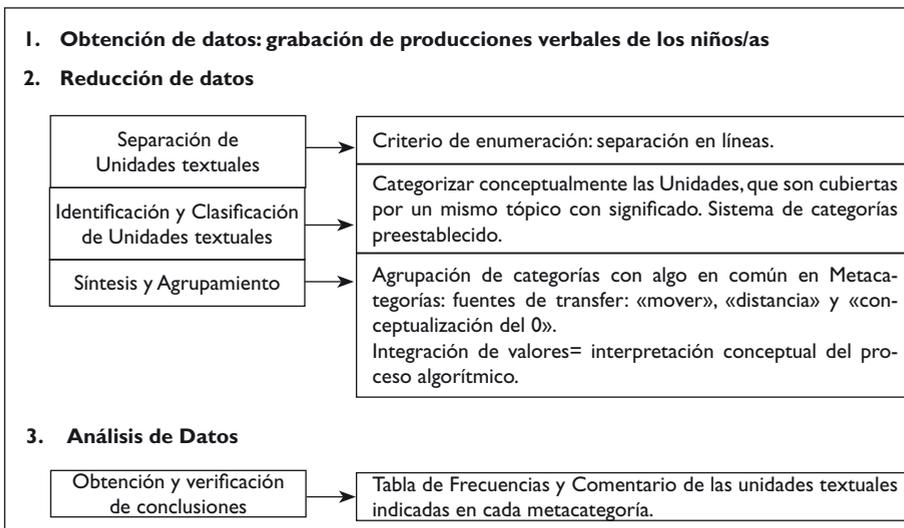
En este proceso de reducción de datos, la estrategia seguida fue establecer categorías (Metacategorías: «Distancia y Quitar» y «Conceptualización semántica del cero»). Asignamos códigos verbales, a los distintos fragmentos de texto que nos informaron sobre el contenido de las categorías. Estos códigos, estaban compuestos por expresiones utilizadas por los niños/as al resolver el procedimiento que forman parte de los esquemas conceptuales, que fundamentan la habilidad y que hemos descrito en la parte teórica de este artículo.

Con todo ello, elaboramos gráficos de conducta del problema⁵, que nos permitieron representar visualmente el proceso cognitivo seguido en los errores más comunes. Para ello, seleccionamos una resta que acumulaba el mayor número de errores y posteriormente, la proyectamos a un gráfico de conducta del problema.

En la Figura I, que exponemos a continuación podemos apreciar los pasos llevados a cabo:

⁵ Gráfico de conducta cognitiva: concepto tomado de (VanLehn, 1990, p. 136).

FIGURA I. Representación de los pasos realizados en el proceso de obtención, reducción y análisis de datos en la investigación llevada a cabo



Resultados

Como ya hemos indicado anteriormente, para analizar los informes verbales identificamos varias expresiones (Sander, 2001), que utilizan los niños/as en la resolución del algoritmo, relacionadas con los esquemas conceptuales: «quitar una parte del todo (Quitar)» e, «ir de una situación inicial a otra final (Distancia)» y «la interpretación semántica del 0», como conjunto vacío de elementos.

Para obtener información sobre estas interpretaciones, fueron analizadas un total de 329 unidades de texto, correspondientes cada unidad a una línea de texto, tomadas de las verbalizaciones de la ejecución de las 20 restas por niño. En total, analizamos las producciones verbales de los nueve niños/as en 180 restas que fueron seleccionados en el centro (2).

En los datos de la Tabla I, mostramos las expresiones o categorías que identificamos en el texto. Estas expresiones, que podemos metacategorizar en dos fuentes de transferencia analógica negativa: «Mover –quitar una parte del todo– y

Distancia –recorrer una distancia– forman parte de las estrategias utilizadas por los niños/as para resolver la resta.

Si observamos la Tabla I, el conocimiento relacional (Resnick, 1983) de los sujetos, está circunscrito a la metacategoría «Quitar», dentro de las categorías semánticas «Menos que» (53%), «Quitar» (20%), y por último «de... a» (19%). Es decir, si sumamos los porcentajes de la metacategoría «Quitar» que se ajusta al esquema conceptual «quitar una parte del todo», podríamos concluir que es la fuente de transferencia analógica más común en la muestra.

TABLA I. Frecuencias y porcentajes de aparición de las metacategorías distancia y mover y conceptualización del cero.

Meta categoría: Distancia			Meta categoría: Quitar			Meta categoría: Conceptualización del cero		
Categorías	f	%	Categorías	f	%	Categorías	f	%
Empecé por/ terminé por	1	0,30	Menos que	176	53	En el cero no hay nada	1	0.30
Contando hasta	1	0,30	Quitar de	12	3.6	Cero no tiene nada	1	0.30
Fui de... a	1	0,30	Quito	66	20	Cero menos nada	8	
2.4								
De... a	63	19	Tenía... quité	15	4,6	Cero no vale nada	2	0.61
			Resté de	4	1,2	Cero = nada	199	60

* (n = 9). Total de restas analizadas 180. Unidades textuales analizadas 329.

Ahora bien, si analizamos cuál es la interpretación conceptual que los niños/as tienen del cero, apreciaremos, que la interpretación conceptual o semántica unida a la interpretación del procedimiento: «quitar una parte del todo», influyen en la producción de errores.

Los resultados de análisis de producciones verbales indican que, el concepto «nada», se relaciona en la muestra con el cero. Opinamos que, la coincidencia en las verbalizaciones de todos los niños/as de la muestra es debida a que en el inicio de la instrucción del cero se enseña como conjunto vacío de elementos, y para ello, es posible que el docente haya utilizado el ejemplo: «cero es nada», o «cero no tiene nada», que los niños/as han memorizado de manera no comprensiva, y han proyectado por el mecanismo analógico de transferencia sobre todos

los ceros de los algoritmos que valoramos. Este hecho, podemos observarlo en las verbalizaciones de ejecución analizadas en las siguientes restas:

- Resta n.º 5 ($50-23 = 27$, como el cero no vale nada, le he cogido una del cinco y a diez menos tres le da siete, entonces me ha quedado un cuatro en el cinco y cuatro menos dos son dos).
- Resta n.º 14 ($102-39 = 137$, dos menos nueve siete; nada menos tres, tres; uno menos nada uno).
- Resta n.º 17 ($702-108 = 604$, aquí pedí una y de ocho a doce me dio cuatro; aquí no pedí nada; porque era cero y cero y cero, me dio cero; a siete le quité uno; pues me da seis).

Se produce pues, un uso mecánico de la analogía que hace que generen conceptos erróneos.

Conclusiones

Los resultados anteriores han evidenciado que los errores, se focalizan en torno a determinados factores de la tarea relacionados con la comprensión de conceptos esenciales para el aprendizaje significativo de la habilidad. Básicamente en el ámbito de los principios que rigen el sistema Base-10 (Resnick, 1987; Fuson, 1992).

Observamos también la dificultad de comprensión conceptual del cero y la influencia del lenguaje utilizado como instrumento mediador entre el alumno y el procedimiento, en el proceso de enseñanza. Opinamos que el vocabulario o conocimiento lingüístico específico de las estructuras semánticas, como instrumento mediador que organiza y estructura la habilidad, es decisivo, en la generación del error. Por otra parte, hemos evidenciado que el vocabulario inscrito en los esquemas conceptuales que soportan la ejecución del procedimiento, cumple un papel esencial en la generalización o transferencia del aprendizaje.

También hemos constatado, que los niños/as al iniciar el aprendizaje construyen interpretaciones de la práctica o desempeño del algoritmo y, abundando en esta línea, hemos demostrado que estas interpretaciones juegan un papel relevante en la generación del error. Es importante pues, que los docentes sepan

identificar este tipo de interpretaciones erróneas de los esquemas estructurales de la habilidad algorítmica.

A nuestro entender, la interacción entre los componentes contextuales, intuitivos, y formales, influye como elemento clave del proceso. Estimamos que en las situaciones analizadas, los niños/as no disponen a nivel conceptual de recursos suficientes. Este hecho, hace que ante situaciones nuevas que no han trabajado con anterioridad, duden de cómo operar. Esta conducta se caracteriza porque, en el intento de resolver la resta, los niños/as acuden a la analogía, pero no se produce la transferencia secuenciada de los pasos del proceso de manera adecuada; porque lo que transfieren son procesos aislados (Hiebert y Lindquist, 1990). Es decir, no ha conectado el conocimiento conceptual y el procesal del algoritmo; y es aquí, en esta conexión donde el docente ha de actuar didácticamente fomentando que el niño/a comprenda significativamente el funcionamiento del procedimiento algorítmico.

En resumen, en este trabajo demostramos que las interpretaciones y los recursos utilizados por los niños/as al resolver el algoritmo han de ser tenidas en cuenta por los profesores en el contexto del aula; porque influyen decisivamente en el conocimiento conceptual y en la relación que el niño/a ha de establecer entre este tipo de conocimiento y el «procedural». En la instrucción deben prestar atención a los factores contextuales, como el lenguaje utilizado en el proceso de enseñanza, que influye en la adquisición de las estructuras que soportan la habilidad.

Opinamos que las aportaciones realizadas, pueden ayudar a los profesores en la programación didáctica de la enseñanza del algoritmo de la sustracción y en la práctica metodológica específica a aplicar, pues contribuyen a clarificar la naturaleza de los procesos algorítmicos.

Referencias bibliográficas

- BAROODY, A., HERBET, P. G. & BARBARA W. (1983). Children's use of Mathematical Structures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 156-68.
- BROWN, J. S., BURTON, R. B. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.

- BROWN, D. & CLEMENT, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: Abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*, 18, 237-261.
- BROWN, J. S. & VANLEHN, K. (1982). Towards a generative theory of «bugs». In T. P. CARPENTER, J. M. MOSER & T. A. ROMBERG (Comps.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 117-135). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- CARPENTER, T. P. & MOSER, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. CARPENTER, J. M. MOSER & J. M. ROMBERG (Comps.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- CARPENTER, T. P. & MOSER, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. LESH & M. LANDAU (Comps.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes*. Nueva York: Academic Press.
- CLEMENT, J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 30, 1241-1257.
- DUIT, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education*, 75, 649-672.
- FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht: D. Reidel.
- (1994). The interaction between the formal and the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. BIEHLER, R. W. SCHOLZ, R. STRASER & B. WINKELMANN (Comps.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 328-375). Dordrecht: Kluwer Academic.
- (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11-50.
- FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. S. & MARINO, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 3-17.
- FUSON, K. (1986). Role of representation and verbalization in the teaching of multi-digit additions and subtractions. *European Journal of Psychology of education*, 35-36.
- (1992a). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. LEINHARDT, R. PUTNAM & R. A. HATTRUP (Comps.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 53-187). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- (1992b). *Research on Whole Number Addition and Subtraction. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). New York: Maxwell Macmillan International.
- FUSON, K. & BRIARS, D. J. (1990). Using base-ten blocks learning/teaching approach for first and second grade place value and multidigit additions and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 180-206.
- GENTNER, D., BREM, S., FERGUSON, R., MARKMAN, A., LEVIDOW, B., WOLFF, P. & FORBUS, K. (1997). Analogical Reasoning and Conceptual Change: A Case Study of Johannes Kepler. *The Journal of the Learning Sciences*, 6 (1), 3-40.
- GENTNER, D., LOEWENSTEIN, J. & THOMPSON, L. (2003). Learning and Transfer: A General Role for Analogical Encoding. *Journal of Educational Psychology*, 2, 393-408.
- HIEBERT, J. & LEFEVRE, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. In J. HIEBERT (Comp.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- HIEBERT, J. & WEARNE, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 251-284.
- LÓPEZ, R. Y SÁNCHEZ, A. B. (2006). Adquisición del error en la sustracción en Educación Primaria. Proceedings of Internacional Symposium on Early Mathematics. Publisher by Department of Psychology. University of Cadiz. Research Group HUM-634, Cádiz, 249-26.
- (2007). Los componentes generadores de errores algorítmicos. Caso particular de la sustracción. *Revista de Educación*, 344, 377-402.
- MAYER, R. E. (1992). Teaching for transfer of problem-solving skills to computer programming. In E. DE CORTE, M. C. LINN & L. VERSCHAFFEL (Comps.), *Computer-based learning environments and problem solving* (pp. 193-206). Berlin: Springer-Verlag.
- NESHER, P. (1976). The three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 369-388.
- NESHER, P. & KATRIEL, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics* (8), 251-269.
- NESHER, P., GREENO, J. G. & RILEY, M. S. (1982). The development o semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13 (4), 373-394.

- NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1994). The role of schemes in two-step problem: Analysis and Research findings. *Educational Studies in mathematics*, 26, 1-23.
- OHLSSON, S. & LANGLEY, P. (1988). Psychological evaluation of path hypotheses in cognitive diagnosis. In H. MANDL & A. LESGOLD (Comps.), *Learning issues for intelligent tutoring system* (pp. 42-62). New York: Springer-Verlag.
- OLHLSON, S. & REES, E. (1991). The function of conceptual understanding in the learning of arithmetic procedure. *Cognition and Instruction*, 103-180.
- ORGILL, M. & BODNER, G. (2003). What research tells us about using analogies to teach chemistry. *Chemistry Education: Research and Practice*, 5, 1, 15-32.
- ORRANTIA, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje*, 26, 451-468.
- RESNICK, L. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. CARPENTER, J. MOSER & T. ROMBERG (Comps.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.
- (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. GINSBURG (Comp.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.
- RESNICK, L. & OMANSON, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. GLASER (Comp.), *Advances in instructional psychology*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.
- SANDER, E. (2001). Solving arithmetic operations: a semantic approach. In proceedings of the 23rd Annual Conference of the Cognitive Science Society. Edinburgh, 915-920.
- THAGARD, P. (1992). Analogy, explanation, and education. *Journal of Research in Science Teaching*, 29, 537-544.
- THORTON, S. (1998). *La resolución infantil de problemas*. Madrid: Morata.
- VAN DE WALLE, J. (1990). Concepts of Number. In J. N. PAYNE (Comp.), *Mathematics for the young child* (pp. 63-89). National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Virginia.
- VANLEHN, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behaviour*, 3, 3-71.
- (1986). Arithmetic procedures are induced from examples. In J. HIEBERT (Comp.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 133-179). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

- (1983). *On the Representation of Procedures in Repair Theory*. In H. GINSBURG (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.
- (1987). Learning one subprocedure per lesson. *Artificial Intelligence*, 31, 1-40.
- VANLEHN, K. & BROWN, J. S. (1980). Planning nets: A representation for formalizing analogies and semantic models of procedural skills. In R. E. SNOW, P. A. FEDERICO & W. E. MONTAGUE (Comps.), *Aptitude, learning, and instruction* (2, 95-137). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- YOUNG, R. M. & O'SHEA, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5, 153-177.
- ZOOK, K. B. (1991). Effects of analogical processes on learning and misrepresentation. *Educational Psychology Review*, 3, 41-72.
- ZOOK, K. B. & DiVESTA, F. J. (1991). Instructional analogies and conceptual misrepresentations. *Journal of Educational Psychology*, 83, 246-252.

Dirección de contacto: Ricardo López Fernández. Universidad de Salamanca. Facultad de Educación Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Paseo Canalejas, 169. 37008 Salamanca, España. E-mail: riclop@usal.es