

# Los componentes generadores de errores algorítmicos. Caso particular de la sustracción\*

Ricardo López Fernández

*Universidad de Salamanca. Departamento de Didáctica de las Matemáticas*

*riclop@usal.es*

Ana B. Sánchez García

*Universidad de Salamanca. Instituto Universitario de Ciencias de la Educación (IUCE)*

*asg@usal.es*

## Resumen

El objetivo principal del estudio que presentamos ha sido investigar el algoritmo de la resta, su aprendizaje en los ámbitos tanto de naturaleza conceptual como procesal, de cara a establecer la relación entre dichos aprendizajes y la génesis del error. Este estudio, por ello, se sitúa en el contexto del análisis científico sobre la naturaleza y las fuentes del error en el proceso algorítmico de la resta. Todo el análisis que se expone, así como las conclusiones establecidas, se han obtenido a partir de una prueba experimental en la que han participado 357 alumnos/as, que estudiaban en los cursos 2º, 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria, pertenecientes a cuatro centros diferentes. A todos ellos, se les evaluó sobre el proceso de aprendizaje y la construcción del conocimiento conceptual y procesal en relación a la práctica algorítmica. Este artículo no sólo describe los resultados obtenidos, también muestra un análisis comparativo, con los resultados aportados en otras investigaciones desarrolladas por autores de referencia internacional. Los resultados que presentamos, demuestran que en el proceso de enseñanza/aprendizaje, tanto el componente conceptual como el procesal, de aplicación concreta del algoritmo, son determinantes en la génesis del error. De los análisis efectuados se infiere, la necesidad de una enseñanza significativa de conceptos básicos, que priorice el desarrollo del sentido numérico, frente a un aprendizaje algorítmico, basado en la aplicación memorística y mecánica de procedimientos cuya naturaleza no es comprendida.

---

\* Este trabajo ha sido desarrollado en el Instituto de Ciencias de la Educación de Salamanca.

*Palabras clave:* aprendizaje algorítmico, educación primaria, errores en la sustracción, didáctica de las matemáticas, conocimiento conceptual y procesal, decaimiento de la información algorítmica.

**Abstract:** *Errors in Subtraction Algorithmic*

The primary aim of this study was to investigate the implied algorithmic processes in the learning of the subtraction, both in the conceptual and procedural planes, and to establish the relation between both components in the origin of the errors. For that reason, this study is classified as a scientific analysis on the nature and sources of error during the algorithmic processes in the learning of the subtraction. The analysis and final conclusions presented here have been drawn from an experimental cross-sectional test in which 357 students (belonging to the last five years of Primary Education and to four different teaching institutions) have participated. They were all evaluated on conceptual and procedural knowledge in relation to the algorithm of the subtraction. This article offers the results obtained, but also shows a comparative analysis, with results from other investigations in other contexts, completed by authors known internationally and part of the literature that approaches the subject. The results provided demonstrate that, in the teaching-learning process, the conceptual and procedural types of components, specifically applied to the algorithm, are determining factors in the generation of errors. The analysis of the results points at the necessity for a meaningful education that teaches basic concepts and prioritises the development of the numerical sense, in contrast to an algorithm learning process, based on the mechanical and memory-drawn succession of rules or procedures whose nature is not understood.

*Key Words:* algorithmic learning, primary education, errors in subtracting, mathematics teaching methodologies, conceptual and procedural knowledge, decay of the algorithmic information.

## Introducción

En las últimas décadas, el estudio de los procesos matemáticos en Educación Primaria, ha girado en torno a la adquisición de conceptos y a la adquisición de habilidades (Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001). Esta tendencia ha influido en el estudio de los errores algorítmicos, que son analizados básicamente desde dos perspectivas teóricas que centran su interés, respectivamente, sobre la semántica o sobre la sintaxis de la habilidad (Resnick, 1982).

La línea de investigación que ha profundizado en los rudimentos conceptuales que sustentan las operaciones aritméticas, cuenta con autores como Fuson (1992); Fuson y Briars (1990); Hiebert y Warne (1996); Nesher, Greeno y Riley (1982); Ohlsson y Rees (1991); Resnick (1982, 1983); Resnick y Omanson (1987), que formulan que la comprensión de conceptos y principios que fundamentan el procedimiento, constituye el primer objetivo de aprendizaje. Los resultados de estos estudios, inciden en situar la adquisición inadecuada del conocimiento conceptual como elemento central en la generación del error algorítmico.

Autores como Fuson (1992); Fuson y Briars (1990); Resnick y Omanson (1987); Gelman y Gallistel (1978); Zur y Gelman (2004), proponen un conjunto de principios relacionados con la adquisición del sistema base diez, directamente unidos a la consecución de la capacidad de recuento. Tal es la relevancia de este logro y su relación con el aprendizaje de procesos algorítmicos, que numerosos investigadores han centrado sus estudios en la adquisición de la secuencia numérica. Los resultados provenientes de esta línea de investigación, coinciden en que la emersión de los conceptos esenciales del número, y la comprensión del funcionamiento aritmético de la resta, se produce antes de que los niños sean expuestos a la matemática formal de la escuela (Baroody, 1988, 2003; Baroody y Ginsburg, 1986; Fuson, 1988; Gallistel y Gelman, 1992; Ginsburg, 1977; Resnick, 1982; Huttenlocher, Jordan y Levine 1994). En otros términos, son capaces de entender el concepto básico de la resta como una transformación que hace una colección más pequeña y pueden reconocer el algoritmo de la sustracción a nivel básico como *quitar de* (Resnick, 1983). Otros autores, van más lejos e informan de la aritmética como capacidad innata (Gelman, 2000).

Con respecto a la adquisición de la serie numérica y su relación con el conocimiento procesal, algunos autores admiten que los dos componentes trabajan en interacción continua Baroody (2003), premisa que corroboran Fuson, Richards y Briars (1982), quienes señalan que el uso de las palabras número no significa que la serie numérica sea aprehendida significativamente, aspecto que evidentemente influye en la práctica algorítmica.

De acuerdo con Resnick (1982), sin la adquisición comprensiva de estas estructuras conceptuales, el resultado sería la violación de alguna de las reglas que rigen el procedimiento. Por ejemplo, los valores convencionales del sistema base -10 y la comprensión del concepto de valor posicional. De este modo, un niño/a ha de ser capaz de conectar la información semántica o conceptual subyacente al procedimiento. Dicha información está sujeta en la sustracción a la comprensión de la composición aditiva de las cantidades, los valores convencionales de la notación decimal, la

realización del cálculo con las partes de la cantidad total, y la recomposición y conservación del minuendo (Resnick y Omanson, 1987).

Por tanto, la adquisición de la serie numérica está íntimamente relacionada con el procedimiento algorítmico. El niño ha de desarrollar la capacidad de contar y la comprensión de las propiedades del número, como por ejemplo, el concepto de cardinal y sus funciones, que le permiten entender significativamente el algoritmo.

Para autores como Resnick (1987), esta comprensión ha de constituirse en base a la familiaridad del niño con los números y a la habilidad para utilizarlos en contextos que lo requieran. Es decir, dicha comprensión está acompañada de la adquisición cognitiva de la flexibilidad suficiente para encontrar soluciones a las tareas matemáticas y establecer relaciones a través de las mismas; característica que, constituye una forma óptima de utilizar los recursos numéricos (Baroody, 2003; Greeno, 1997). La adquisición de este requisito, posibilita el desarrollo de habilidades como la de operar con los algoritmos.

En resumen, son muchas las aportaciones realizadas desde la vertiente conceptual al estudio de los errores algorítmicos y su relación con la inadecuada adquisición de estructuras numéricas; aunque también podemos encontrar resultados relevantes en torno a la generación de errores desde la perspectiva sintáctica que analizamos resumidamente en los próximos párrafos.

Destacable en este sentido es la Teoría de VanLehn, que tomando como plataforma el estudio de los errores cometidos en el algoritmo de la resta, analiza más de 100 tipos de *bugs* o errores distintos que cometen los estudiantes durante la ejecución de la operación.

Los resultados de su investigación aportaron datos interesantes sobre cómo las personas aprenden habilidades procesales, y por qué cometen errores. En esta línea de investigación, encontramos trabajos que ilustran cómo algunos estudiantes muestran procesos erróneos sistemáticos *Buggy algorithmic*, cuando ejecutan el procedimiento sustractivo (Brown y Burton, 1978; Brown y VanLehn, 1980, 1982; VanLehn, 1982, 1983, 1987, 1990; Burton, 1982; Young y O'Shea, 1981).

En relación a la naturaleza de los mismos, en sus investigaciones, mantienen la creencia de la existencia de algoritmos reparadores que surgen cuando se olvidan o se aprenden mal los procedimientos correctos. De este modo, el niño/a ante la ausencia del proceso entra en un *impasse*<sup>1</sup> (Brown y VanLehn, 1982; VanLehn, 1990), y recurre a aplicar varias estrategias para salir del mismo y resolver la tarea propuesta. Estas estrategias son denominadas *Repairs* (VanLehn, 1983, 1990). Algunas *reparaciones*

---

<sup>1</sup> VanLehn (1983, 1990) describe un *impasse* como una situación que surge ante una tarea que el aprendiz no sabe ejecutar, y que provoca que busque el camino que le parece más adecuado para la solución, aunque no sea el correcto. Dicho camino, generaría un *bug*. Agradecimientos: Este trabajo ha sido desarrollado en el Instituto Universitario de Ciencias de la Educación de la Universidad de Salamanca.

generan un resultado correcto, otras generan errores, *Bugs*, y cada una de ellas constituye un *bug* diferente.

Así, según la Teoría de la Reparación, *Repair Theory* (Brown y VanLehn, 1980; VanLehn, 1990), tales errores se producen a partir de los ejemplos propuestos en el proceso de enseñanza de la sustracción a través de mecanismos de aprendizaje por analogía. Del mismo modo, la teoría contempla la posibilidad de que estos errores se transformen en sistemáticos, porque pasan a formar parte del procedimiento.

No podemos abandonar este planteamiento sin hacer referencia a la investigación de Young y O'Shea (1981); autores que analizan las aportaciones de Brown y Burton (1978) y de VanLehn y Brown (1980). Basan su teoría en el aprendizaje de las reglas que subyacen al procedimiento, y en la adquisición correcta de las mismas. Para ellos, los errores son resultado de un fracaso en el proceso de ejecución del algoritmo. Al objeto de demostrar su teoría, intentan mostrar la naturaleza de los diferentes patrones de error, con su consiguiente representación. Suponen que los errores se deben a la memorización imperfecta de pasos que constituyen el proceso, y son similares a los tipos de errores vistos en experimentos de aprendizaje verbal. Esto es, omisiones, permutaciones o intrusiones. Así, postulan que podríamos encontrar estudiantes que al intentar resolver una sustracción, omiten un paso, permutan el orden de los pasos, mezclan los componentes de los pasos, o incluyen pasos de otros procesos como pueda ser la adición. Por ejemplo la producción  $N-0=N$  ( $3-0=3$ ), puede ser cambiada por  $0-N=N$  ( $0-3=3$ ). Este error podría ser explicado; porque en la práctica de la suma los niños/as adquieren el modelo aditivo del 0, que transportan al algoritmo de la resta.

Podemos afirmar pues, que estos autores centran sus investigaciones en la sintaxis de los procesos aritméticos, interesándose fundamentalmente por los errores sistemáticos que cometen los niños durante su ejecución (López y Sánchez, 2006).

En resumen, la dicotomía entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procesal ha sido un tema prioritario en la investigación matemática (Kilpatrick et al., 2001; Wu 1999). Naturalmente, tal dualidad, ha incidido en el estudio del origen de los errores algorítmicos. Como hemos señalado, numerosas investigaciones advierten de la existencia de una relación entre la adquisición conceptual de las estructuras numéricas y la ejecución procesal de los algoritmos (Richards y Briars 1982; Fuson, 1992; Fuson y Briars, 1990; Hiebert y Carpenter, 1992; Hiebert Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray, Oliver y Human, 1997; Stein, Grover, y Henningsen, 1996).

Teniendo en cuenta las aportaciones de las investigaciones precedentes, en el presente artículo, como objetivo general tratamos de analizar el error en la sustracción y el tipo de relación que se establece entre el conocimiento conceptual y el procesal en la generación del mismo. Todo ello, en el contexto específico de nuestro sistema educativo.

## Metodología

El tipo de diseño de investigación utilizado es de corte descriptivo-correlacional. Desde el punto de vista de la estrategia de recogida de información de corte transversal. En la presente investigación nos hemos propuesto los siguientes objetivos.

## Objetivos de la investigación

### *Objetivo primero*

Determinar el nivel de adquisición conceptual del procedimiento.

### *Objetivo segundo*

Analizar la tipología y estabilidad del error.

### *Objetivo tercero*

Establecer posibles relaciones entre el conocimiento conceptual y procesal en su producción.

## Población y muestra

La muestra está compuesta por cuatro colegios públicos de Educación Primaria que participaron desinteresadamente en la investigación. Dos colegios situados en la ciudad de Salamanca y otros dos situados en zonas rurales. En el caso de los colegios ubicados en la ciudad, sus alumnos representan a una población perteneciente a las clases sociales: media-alta, media-baja y baja. Los colegios ubicados en zonas rurales, son dos CRA, localizados en zona de montaña de la provincia de Salamanca. Los estratos socioeconómicos que definen su población podríamos caracterizarlos pertenecientes a las clases sociales media y baja.

El número total unidades de análisis está compuesto, por alumnos de ambos sexos, (58,50%, niños/41,50%, niñas); que se encuentran distribuidos por cursos como exponemos en la Tabla I, que mostramos a continuación. Fueron seleccionados todos y cada uno de los alumnos que integraban los cursos señalados ( $N=354$ )<sup>2</sup>, a excepción de los niños/as con discapacidad cognitiva, puesto que tratábamos de indagar sobre el origen del error.

---

<sup>2</sup> Para el análisis de la prueba número 2, contamos con 357 unidades muestrales debido a su incorporación posterior al aula.

TABLA I. Población escolar curso 2003/04 y muestra de investigación por curso

Salamanca y provincia			Muestra		
Curso	f	%	Curso	f	%
2º	2359	18,50	2º	63	17,80
3º	2389	18,70	3º	72	20,33
4º	2582	20,25	4º	73	20,62
5º	2644	20,70	5º	75	21,20
6º	2786	21,85	6º	71	20,05
<b>Total</b>	<b>12760</b>	<b>100,0</b>	<b>Total</b>	<b>354</b>	<b>100,0</b>

Para determinar si las frecuencias de la muestra que habíamos obtenido eran significativamente igual a la frecuencia de niño/as escolarizados en Salamanca y provincia, realizamos una comparación global de grupos de frecuencias utilizando el estadístico Chi-Cuadrado de Pearson. El Valor obtenido:  $\chi^2 = 1,0163$  (valor tabular:  $\chi^2_{(4; 0,05)} = 9,4877$ ), no es significativo. Es decir, la distribución de frecuencias por cursos en la muestra es igual que la distribución de frecuencias por cursos en la población de escolarizados en la provincia.

## Instrumentos

Para la presente investigación se han utilizado dos instrumentos de recogida de información que describimos a continuación:

*Prueba objetiva número 1 de análisis conceptual.* El objetivo básico, era establecer si los niños poseían los conceptos necesarios para la adquisición comprensiva de la resta. Compuesta por 10 ítems de elección múltiple, tratamos de constatar si eran capaces de realizar procedimientos como: leer, escribir, comparar, componer y descomponer números naturales, resolver ejercicios usando analogías, reconocer el valor posicional de los dígitos, o el concepto de la resta, operar usando el algoritmo, resolver problemas... Cada ítem fue definido en función de un objetivo relacionado con los componentes conceptuales necesarios para la adquisición del algoritmo, descritos en los estudios de Resnick y Omanson (1987, p.49), que nos permitió contar inicialmente con garantías suficientes en relación a la validez de contenido del instrumento y su adecuación a la población de referencia. Además utilizamos el juicio de expertos, para valorar si el contenido de cada ítem respondía al objetivo definido, y probamos en un grupo de niños de diferentes edades.

*Prueba de análisis procesal número 2.* Los niños resolvieron en el aula sin límite de tiempo, 20 sustracciones (prueba número 2), usadas por VanLehn (1990, p.170),

que constituyeron para el autor un instrumento básico de identificación de una gran variedad de errores. La fiabilidad y validez de la misma viene avalada por la investigación realizada por el autor, que constituye una referencia de orden mundial en el campo de estudio de los errores en la sustracción y que fundamentó su teoría *Repair Theory*. Exponemos a continuación una cita del autor en relación a la prueba.

These tests were carefully designed to be able to detect and to differentiate all logically possible combinations of the bugs known... (VanLehn, 1990, p.193).

A través de esta prueba tratamos de categorizar los errores que se producen con mayor frecuencia, y averiguar si persisten sistemáticamente. Además, comparamos nuestros resultados con los obtenidos por otros autores.

Por otra parte, quisimos apreciar la relación entre el conocimiento conceptual y el procesal. Para ello, correlacionamos mediante el estadístico Correlación de Pearson los resultados obtenidos en los ítems 3,4, 5 y 8 de la prueba conceptual, que evaluaban la adquisición de conceptos relacionados con el valor posicional y agrupativo de las cifras, y el control de la serie numérica con los resultados obtenidos en la resta número 19, que era la que más incidencia de errores acumulaba.

## **Análisis de datos**

Para el análisis de la base de datos generada, utilizamos el programa estadístico SPSS, versión 11.5 y aplicamos las pruebas estadísticas, descriptivas, correlacionales e inferenciales oportunas en relación con los objetivos de la investigación y la naturaleza de las variables analizadas. A lo largo de los párrafos siguientes, dividimos el apartado en tres secciones relacionadas con cada uno de los objetivos propuestos y presentamos los análisis, resultados y conclusiones de tales análisis.

### **Resultados sobre el nivel de adquisición conceptual. Prueba I (Objetivo I)**

En la Tabla II, mostramos el análisis de varianza de los totales de aciertos sobre 10 ítems que componía la prueba número 1. En ella vemos reflejados los siguientes estadísticos: media del total de aciertos sobre diez de la muestra, media y

variabilidad dentro de cada curso. Posteriormente analizaremos los resultados en relación a las capacidades que evaluaba cada ítem.

**TABLA II.** Media aciertos sobre 10 en los diferentes cursos

Curso	N	Media	Desviación típica
2	46	6,33	1,752
3	67	6,54	1,744
4	65	7,37	1,782
5	71	7,11	1,608
6	69	6,78	1,444
<b>Total</b>	<b>318</b>	<b>6,86</b>	<b>1,691</b>

Como puede observarse, una vez realizado el análisis de varianza, obtuvimos diferencias significativas entre los cursos a un nivel de significación 0,01 ( $F= 3,791$ ;  $p= 0,005$ ). Analizando estas diferencias, sólo se observan entre los cursos 2º (media 6,33) y 4º (media 7,37). Es decir, el mayor número de aciertos sobre 10, se produce en cuarto y el menor número en segundo. Este resultado, se repite a lo largo del análisis de todos los datos. Obviamente es congruente con el desarrollo de la programación curricular de matemáticas en Educación Primaria; puesto que en 2º aún no se ha completado el proceso de introducción del algoritmo de la resta.

**TABLA III.** Porcentaje aciertos Curso/ítem

	Ítem 1%	Ítem 2%	Ítem 3%	Ítem 4%	Ítem 5%	Ítem 6%	Ítem 7%	Ítem 8%	Ítem 9%	Ítem 10%
2º	95	78,3	42,5	11,7	27,4	71,4	86,4	12,1	12,1	60,0
3º	84	86,1	30,6	8,3	25,4	91,3	93,1	26,4	23,9	70,8
4º	95,9	97,3	57,7	0	16,9	89,9	91,8	5,6	55,6	83,3
5º	94,7	93,3	54,1	1,4	21,3	94,7	98,6	4,0	65,3	79,7
6º	94,4	98,6	37,1	1,4	17,1	91,4	98,6	9,9	54,9	85,9
<b>Total</b>	<b>92,9</b>	<b>91,2</b>	<b>44,5</b>	<b>4,3</b>	<b>21,5</b>	<b>88,5</b>	<b>94,0</b>	<b>11,5</b>	<b>43,8</b>	<b>76,7</b>

Para avanzar un paso más en el análisis del conocimiento conceptual que poseían los niños/as, evaluamos los porcentajes de respuestas correctas que manifestaban en cada ítem, en relación a los objetivos establecidos para cada uno de ellos (Tabla III).

El porcentaje de aciertos en los ítems 1 y 2 que evaluaban la lectura y escritura de las cantidades, con un 92,9% en el primero y 91,2 % en el segundo; aunque es un porcentaje elevado, permite concluir que los niños leen y escriben cifras de manera mecánica y memorística (Fuson et al., 1982). Idea que podemos observar si relacionamos los resultados porcentuales de estos ítems con el resultado del ítem número 5 (21,5%), que evaluaba la relación entre los números y el control de la serie numérica.

Observamos que los ítems 3 y 4 que evaluaban el conocimiento del sistema decimal, obtenían frecuencias de aciertos bajas. Así, encontramos que el ítem 3, presentaba un porcentaje del 44,5% de resultados correctos. Este último dato traducido en términos de conceptos necesarios para la correcta adquisición del algoritmo, supone que más de la mitad de los niños/as evaluados no operaba con el primero de los principios esenciales para la comprensión del algoritmo, como es la composición aditiva de las cantidades. A continuación exponemos una cita de Resnick y Omanson (1987, p.49), que consideran este principio como el más básico: «The first and most basic principle in our set is the notion of additive composition».

Por otra parte, el ítem 4 que evaluaba el conocimiento sobre el valor posicional de las cifras, obtuvo peores resultados. Sólo el 4,3% de los niños/as contestaron correctamente a este ítem. De la importancia del principio en relación a las operaciones aritméticas, de nuevo anotan los autores:

All operations in written arithmetic, if they are to have meaning beyond rules for manipulating the symbols themselves, must be interpreted in terms of the values conferred by the conventions of decimal notation. (Resnick y Omanson 1987, p.50).

El ítem 5, que evaluaba el control de la seriación natural, obtuvo un 21,5% de resultados correctos. En relación a este dato, ya hemos manifestado en la introducción que la comprensión del número, está unida al desarrollo posterior de los procedimientos algorítmicos (Resnick, 1987; Greeno, 1997, Fuson, 1992).

El ítem 6, que evaluaba el control de la serie numérica mediante mecanismo análogo de ordenación obtuvo un resultado de 88,5 %, adecuado comparado con el resultado del ítem núm. 5. Por otra parte, al analizar las respuestas más frecuentes al ítem núm. 3, que evaluaba el conocimiento del sistema decimal, encontramos que el 51,7% de los niños/as habían respondido a la pregunta manifestando una conducta que denotaba el empleo de mecanismos automáticos de respuesta, basados en la utilización de la analogía mecanicista aplicada sin comprensión.

En relación al ítem 7, que evaluaba la posesión del concepto esencial de la resta, los resultados obtenidos con un 94% de aciertos, corroboran teorías como la de Huttenlocher et al., (1994). Estos autores indican, que los niños/as comienzan a construir una comprensión del funcionamiento aritmético de la resta, antes de iniciar sus estudios escolares. Del mismo modo, el ítem 10 que trataba de identificar el número de niños/as capaces de señalar la operación de la resta como procedi-

miento de resolución del problema, con un resultado 76,7%, permite confirmar los postulados de estas teorías.

Otro dato significativo, proviene de la observación de los ítems 8 y 9, que analizan si el niño controla los operadores que rigen el funcionamiento aritmético de la resta, y si conecta estas reglas con el conocimiento conceptual de la sustracción. En estos ítems, tan sólo un 11,5% para el primero y un 43,8% para el segundo responden adecuadamente. Este resultado lleva a pensar de nuevo, que los niños/as, aplican mecánicamente el procedimiento, lo que constituye una fuente de error, generada por la falta de comprensión sobre la naturaleza y las reglas que gobiernan los procesos aritméticos.

Por otra parte, no sólo resulta importante el análisis de los datos por ítem, sino que resulta pertinente analizar su evolución a través de los diferentes cursos. Como ya hemos indicado anteriormente, (véase Tabla III), apreciamos un incremento de respuesta correcta por curso en general, excepto en los ítems 3, 4, 5 y 8 en los cuales se produce un cierto *decaimiento de la información* con respecto a los cursos situados en niveles inferiores (4º y 6º).

## La naturaleza de los errores y su tipología (Objetivo 2)

### Categorías de análisis

Para el análisis de la base de datos que generó la prueba número 2, utilizamos el programa estadístico SPSS 11.5. Al existir precedentes teóricos de análisis, optamos por establecer las mismas categorías que crearon Brown y VanLehn (1982, p.102), a las cuáles hemos añadido alguna más al objeto de depurar en mayor medida la información.

Las categorías de análisis fueron: *aciertos y errores*. Dentro de la categoría errores analizamos las subcategorías: *bug* o error (niños/as que tuvieron errores que podían ser explicados por sólo uno o dos tipos de bug y también estudiantes que exhibieron claramente un *bug* y otras conductas que no podían ser explicadas por ese *bug*. *Libres de bug*: niños/as que sólo erraron en una o dos sustracciones y además los errores no eran consistentes con ningún tipo de bug. *No diagnosticable*: niños/as que exhibieron alguna conducta errónea, pero no era consistente.

### Análisis de datos categoría I. Aciertos

Según podemos apreciar en la Tabla IV, del total de la población que compone la muestra (N = 357), respondieron correctamente a las 20 restas, 95 niño/as (26,61%).

TABLA IV. Alumnos por centro y curso que completan correctamente las 20 restas

Centros	Nmuestra	N20	% sobre el total de muestra
(1)	37	9	24,32 %
(2)	18	3	16,67 %
(3)	232	69	29,74 %
(5)	70	14	20,00 %
Total	357	95	26,61 %

Apreciamos en los datos, que el porcentaje mayor de los estudiantes que responden correctamente a todas las restas de la prueba, pertenecen al Centro (3), que está relacionado con las mejores condiciones contextuales de partida: nivel de rendimiento, situación socioeconómica familiar, situación urbana en zona centro, etc.

En relación a la distribución de aciertos por cursos que exponemos en la Tabla V, el total de niños/as que no cometen ningún error en la prueba, se incrementa a lo largo de los cursos para descender a partir de 5º y situarse de nuevo en las mismas frecuencias que en 4º. Recordamos el análisis que hemos realizado en párrafos anteriores sobre el decaimiento de la información algorítmica que de nuevo vemos reflejado en esta prueba.

TABLA V. Total de alumnos por curso que completan correctamente las 20 restas

Curso	Nmuestra	N20	% sobre el total de muestra en cada curso
Segundo	64	4	6,25
Tercero	72	15	20,83
Cuarto	73	23	31,51
Quinto	75	30	40,00
Sexto	73	23	31,51
Total	357	95	26,61

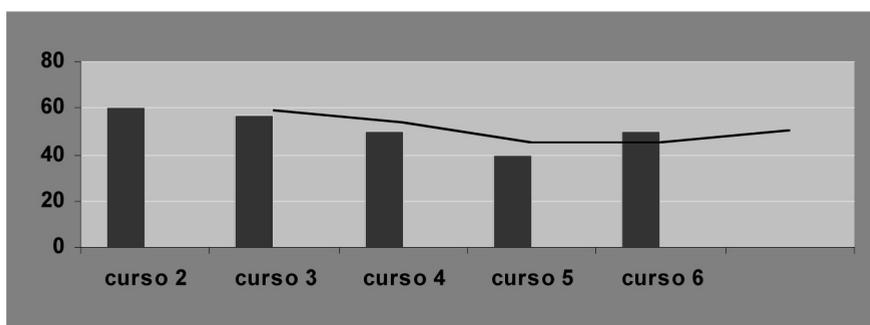
### **Análisis de datos categoría 2. Errores y tipología:**

Del total de 7140 restas analizadas, el porcentaje de restas con error es de 23,47%. En cuanto a la distribución de errores por cursos y restas, la Tabla VI que exponemos a continuación es significativa. Del análisis de los datos, concluimos que el número de errores desciende linealmente por curso, con un coeficiente de proporcionalidad de (- 73,8), (véase Gráfico D), apreciándose cierta estabilidad en el descenso entre 5º y 6º.

TABLA VI. Errores por resta<sup>3</sup>

Restas	error	%	Acierto	%	total	%	
R1	(647-45)	27	7,5	330	92,4	357	100,0
R2	(885-205)	31	8,6	326	91,3	357	100,0
R3	(83-44)	55	15,4	302	84,5	357	100,0
R4	(8305-3)	29	8,1	328	91,8	357	100,0
R5	(50-23)	67	18,7	290	80,2	357	100,0
R6	(562-3)	76	21,2	281	77,6	357	100,0
R7	(742-136)	56	15,6	301	84,3	357	100,0
R8	(106-70)	77	21,5	280	78,4	357	100,0
R9	(716-598)	87	24,3	270	75,6	357	100,0
R10	(1564-887)	98	27,4	259	72,5	357	100,0
R11	(6591-2697)	96	26,8	261	73,1	357	100,0
R12	(311-214)	90	25,2	267	74,7	357	100,0
R13	(1813-215)	112	31,3	245	68,6	357	100,0
R14	(102-39)	88	24,6	269	75,3	357	100,0
R15	(9007-6880)	97	27,1	260	72,8	357	100,0
R16	(4015-607)	107	29,9	250	70	357	100,0
R17	(702-108)	112	31,3	245	68,6	357	100,0
R18	(2006-42)	116	32,4	241	67,5	357	100,0
R19	(10012-214)	134	37,5	223	62,4	357	100,0
R20	(8001-43)	121	33,8	236	66,1	357	100,0

GRÁFICO I. Errores por curso



En la Tabla VI, observamos que el mayor número de errores se concentra en determinadas restas que acumulan más de cien errores cada una. Tal agrupación del error, es debida, a la estructura conceptual subyacente a las mismas, de la cuál se deriva el manejo de reglas de transformación del cero. Asimismo, en la resta 19, que acumula

<sup>3)</sup> Tomamos como referente los cursos 3°, 4°, 5° y 6°, debido a que en 2°, aún no se ha culminado la instrucción completa del algoritmo de la resta con llevadas.

mayor número de errores, apreciamos algunos rasgos específicos que la caracterizan, como por ejemplo, el minuendo cuenta con dos ceros seguidos, uno de ellos situado encima de un espacio en blanco y presenta una columna en la que el minuendo y el sustraendo son igual a uno.

Por último, presentamos las frecuencias de error en relación a la muestra de población tomada por curso (Tabla VII).

**TABLA VII.** Porcentaje de errores por curso

Errores	Curso 2	Curso 3	Curso 4	Curso 5	Curso 6	total
Frecuencia	60	57	50	45	50	262
Porcentaje	(22,9%)	(21,8%)	(19,1 %)	(17,2%)	(19,1 %)	(73,38%)

En la tabla anterior, podemos apreciar que el porcentaje de errores por curso disminuye, mostrando un punto de inflexión en 5º para subir en 6º de nuevo. Brown y Burton (1978) ponen de manifiesto la misma tendencia. Su explicación la podemos ver evidenciada en la siguiente cita:

**Diagnostic Results for the Nicaraguan Data Base**

The above classification procedure was used to analyze the set of test responses for 1325 fourth, fifth, and sixth graders. A summary of the diagnostic classification by grade is given in Table 6. As can be seen, nearly 40% of the students exhibited consistently buggy behaviour. This figure agrees with a similar result reported by Cox (1975). The similarity across grade level may be due to the fact that addition and subtraction are not presented again after the 4th grade (Brown y Burton, 1978, p.181)

Por tanto, según estos autores, el hecho de no presentar la adición y la sustracción en los cursos posteriores a 4º, incide en los resultados. Los datos de autores tan relevantes, ofrecen un referente de validación metodológica para nuestra investigación.

Para abundar más en la concordancia entre nuestro estudio y los datos de las investigaciones desarrolladas por Brown y Burton en 1978, presentamos a continuación la Tabla VIII, que compara nuestros resultados con los obtenidos por los citados autores:

TABLA VIII. Comparación de los resultados de Brown y Burton (1978) con los obtenidos en nuestra investigación

Investigación	Errores	Curso 4	Curso 5	Curso 6	total
Brown, Burton 1978	f	504	399	422	1325
	%	(38,03%)	(30,11%)	(31,84)	100%
Nuestra investigación 2003-4	f	50	45	50	145
	%	(34,48 %)	(31,03%)	(34,34%)	100%

Utilizamos el estadístico  $X^2$ , para comparar los resultados en ambas muestras y comprobar la hipótesis nula ( $H_0 =$  no existe diferencias estadísticas entre los porcentajes de las dos investigaciones). El resultado obtenido de  $X^2 = 0,5558$  que comparado con la tabla de valores para la distribución de  $X^2$  con 3 grados de libertad y con un nivel de significación del 0,05 equivale a 7,81. Es decir, se acepta la hipótesis nula, no hay diferencias en los porcentajes de las muestras.

### Tipología de los errores

Para categorizar los errores cometidos por los alumnos, tomamos como referente el glosario de errores (*bugs*) definidos por VanLehn (1990, p.223)<sup>4</sup>. Asignamos un número del 1 al 120, para cada uno de los errores y agregamos el núm. 121 (subcategoría no diagnosticable) y el número 122 (error de cómputo). Para el estudio de las categorías, utilizamos el programa estadístico SPSS 11.5, al que recurrimos para el análisis cuantitativo de las frecuencias y tipificación de los errores. En total, analizamos 122 errores distintos.

Del análisis de los resultados, evidenciamos que el mayor número de errores se concentra en 3º curso, produciéndose una conglomeración de frecuencias en las categorías de errores que exponemos en la Tabla IX.

De los errores citados, algunos de ellos persisten a lo largo de todos los cursos. Estos errores los denominamos sistemáticos *bugs algorithmics*<sup>5</sup>. En la Tabla IX, que presentamos seguidamente, mostramos las frecuencias de los errores más comunes. El análisis se efectúa sobre el total de las 7.140 restas. Recordamos que la especificación de las características de estos errores y el ejemplo, se encuentra en VanLehn (1990, p.223).

<sup>4</sup> Los diferentes errores aparecen con su nombre original en inglés. Existe un consenso general en la utilización de la nomenclatura anglosajona para la descripción de los errores o *bugs*.

<sup>5</sup> *Bug algorithmics*: errores que cometen los niños sistemáticamente y a lo largo de todos los cursos.

TABLA IX. Los 22 errores más frecuentes en las restas

Categoría y nombre del error	Ejemplo <sup>6</sup>	f
Errores de cómputo		179
Borrow-no-decrement	62-44=28	142
Borrow-across-top-smaller-decrementing-to	183-95= 97	141
Borrow-across-zero	904-7= 807	131
1-1=0 after-borrow	812-518=304	142
Always borrow	488-229=1159	127
Borrow-across-second-zero	5003-3058=1045	116
Always-borrow-left	733-216=427	113
Bias-instead-of-borrow	4238-444=38 4	107
Add-instead-of-sub	32-15=47	106
Add-no-carry-instead-of-sub	47-25=62	102
Borrow-from-zero-is-ten	604-235=479	96
Add-LR-decrement-answer-carry-to-right	411-215=527	98
Blank-instead-of-sub	425-283=2 2	97
Blank-instead-of-borrow-from-zero	3085-90=30 8	88
Ad-borrow-decrement-without-carry	863-134=74	84
1-1=1-after-borrow	812-518=314	84
Forget-borrow-over-blanks	347-9=348	69
Add-borrow-decrement	863-134=749	76
Dif-0-N=N	80-27=67	73
Smaller-from-larger	81-38=57	106
0-N=N- after-borrow	512-136=436	55

El análisis de la tabla anterior, aporta las siguientes conclusiones: el 51,3% de los casos analizados mostraban más de un bug o tipo de error. El error 122 (errores de cálculo), presenta el mayor número de frecuencias. Algunos de los errores con concentración superior de frecuencias, persistían en determinadas restas durante todos los cursos de 2º a 6º; otros, desaparecían a partir de cuarto.

Con respecto, a la categoría de error 122 (errores de cómputo) que presenta un porcentaje de 35,01%; de nuevo los resultados de nuestra investigación se manifiestan en concordancia con estudios de otros autores, como Young y O´Shea y VanLehn. En las conclusiones obtenidas por estos autores, también aparece un número de frecuencias muy elevado, en el primero de ellos, en un 37% de los casos y en el segundo en un 27,13%. VanLehn (1990:104), ilustra que la proporción de casos en esta categoría de error, disminuía con la instrucción, decreciendo a medida que se ascendía en nivel. Este hecho lo apreciamos en nuestra investigación, (ver Tabla X), en la que mostramos el número de apariciones del mismo, en relación al número de sujetos que la cometen por curso.

<sup>6</sup> Ejemplos tomados de (VanLehn 1990).

TABLA X. Frecuencia de apariciones en la categoría error de cómputo (error 122)

NÚM. apariciones/curso	2°	3°	4°	5°	6°	total
0	33	45	48	53	53	232
1	23	27	20	15	14	89
2	4	6	4	6	5	25
3	4	2	1	1	0	8
4	0	2	0	0	0	2
6	0	0	0	0	1	1
total	64	72	73	75	73	357

Asimismo también presentamos la Tabla IX, que informa sobre la frecuencia de apariciones del error 121 (categoría no diagnosticable), que aparece en nuestra muestra en un porcentaje del 5,88%.

TABLA XI. Frecuencia de apariciones en la categoría error no diagnosticable (error 121)

NÚM. apariciones/curso	2°	3°	4°	5°	6°	total
0	56	69	66	73	71	335
1	8	2	6	1	1	18
2	0	1	0	1	1	2
3	0	0	1	0	0	1
total	64	72	73	75	73	357

VanLehn (1990, p. 104), investiga de nuevo a estos niños que cometían errores asignados a las subcategorías 122 y 121. Concluyó que si las pruebas se hubieran pasado dos veces, el número de estudiantes se hubiera reducido en una proporción 1/4. De este modo, ilustró que aunque el error era constante a lo largo de los cursos, no era suficiente para poder establecer un diagnóstico. Nosotros opinamos que, existen causas de naturaleza pedagógico-situacional, que dependen del contexto del aula, sus características, y momento de ejecución de la prueba. Estas causas, pueden fundamentar el origen de estos errores. En Tabla XII, observamos los errores sistemáticos cometidos a lo largo de todos los cursos en determinadas restas.

TABLA XII. Errores sistemáticos a lo largo de todos los cursos

Nombre del error	Resta
Borrow-no-decrement	R13, R7, R14, R15
Borrow-from-zero-is-ten	R8
Borrow-from-one-is-ten	R9
Borrow-into-one=ten	R9, R12
Borrow-only-once	R10
Forget-borrow-over-blank	R10, R13, R20
Ignore-leftmost-one-over-blank	R13
-   = 0 - after-borrow	R11, R12, R13
-   = 1 - after-borrow	R12
Borrow-no-decrement-except last	R14, R15
Always-borrow	R16
Borrow-from-zero	R17
Don't-decrement-zero-over-zero	R17
Borrow-from-at-zero	R17

Del análisis de la tabla anterior podemos inferir que la producción del error en determinadas restas está influida por su estructura conceptual. De ahí que recaiga siempre sobre las mismas. También observamos que todas las categorías de errores obtenidos, están relacionadas con el cero. De este modo, podemos hacer corresponder los errores con las siguientes conductas:

- Pedir prestado sin tener en cuenta si es necesario.
- No contabilizar la *robada*, a menos que, la columna sobre la que tiene que recaer el préstamo esté situada más a la izquierda en el problema.
- Realizar bien los primeros robos, pero no continuar con la captación de recursos.
- En situación de petición de préstamo agregar correctamente, pero no cambiar ninguna columna a la izquierda.
- Cuando en una columna (1-N), se requiere un préstamo, el niño/a cambia el uno a diez en lugar de agregar diez.
- Cuando hay que pedir prestado a un cero, éste se cambia a nueve, pero no se continúa la captación de recursos en la columna situada más a la izquierda.
- No pedir prestado por un cero que está encima de un cero.
- No tomar la *robada* de un número que está encima de un espacio en blanco.

Todas estas conductas se encuentran relacionadas con la inadecuada instrucción sobre la función posicional del cero. Por tanto, el fragmento conceptual, creemos es el cimiento que sustenta el proceso, en su inicio. En el próximo apartado delimitaremos la relación entre el conocimiento conceptual y el procesal en la generación del error.

### Análisis de la relación existente entre el conocimiento conceptual y el procesal en la generación de los errores (Objetivo 3)

Para verificar tal relación, fusionamos los archivos SPSS que habíamos elaborado para el análisis de la prueba 1, que trataba de cotejar si los niños habían adquirido los conceptos necesarios para la resolución correcta de la sustracción, y la prueba 2, de resolución de las 20 restas. Posteriormente correlacionamos mediante el estadístico Correlación de Pearson los resultados obtenidos en los ítems 3, 4, 5 y 8 de la prueba conceptual, que evaluaban la adquisición de conceptos relacionados con el valor posicional de las cifras, y el control de la serie numérica con los resultados obtenidos en la resta núm. 19, que era la que más incidencia de errores acumulaba. Presentamos los resultados por cursos, en la Tabla XIII, que exponemos a continuación.

TABLA XIII. Correlación bilateral Pearson prueba 1 y prueba 2

Curso	rx <sub>y</sub> (Total aciertos/10 y Total aciertos restas)	p	N
Segundo	0,514**	0,000	46
Tercero	0,324**	0,007	67
Cuarto	0,375**	0,002	65
Quinto	0,347**	0,003	71
Sexto	0,197	0,105	69

En los datos que presenta la tabla anterior, apreciamos que la correlación entre aciertos en las dos pruebas es significativa en todos los cursos excepto en 6°. Creemos que el resultado indica que los niños/as de este curso poseen un basamento conceptual amplio, dado el número de aciertos en la prueba 1, que es superior al número de aciertos en la prueba 2 de naturaleza netamente procesal. Este resultado, incide en la importancia del marco conceptual que preside el algoritmo a la hora de generar errores, y permite afirmar que los errores producidos, son ya de corte procesal. Es decir, se ha invertido la sintaxis del algoritmo, afectando al proceso e incorporándose como un nuevo algoritmo erróneo (VanLehn, 1990). Por tanto, son errores de carácter procesal.

## Conclusiones

A modo de conclusiones finales, podemos indicar que a la luz de los resultados obtenidos hemos de formular las siguientes consideraciones.

En primer lugar, que los resultados globales obtenidos en la prueba número 1, ponen en evidencia que, tres de los principios necesarios para la adquisición del algoritmo, como son: la composición aditiva de las cantidades, los valores convencionales de la notación decimal y la capacidad de establecer relaciones entre los números en una serie, no son comprendidos significativamente.

Concluimos que, los conceptos relacionados con las unidades de recuento, no son significativamente aprehendidos. Este resultado, evidencia los porcentajes que obtuvimos en los ítems número 1, 2 y 5; que obligan a pensar que la mayor parte de los niños/as aprende la serie numérica de memoria sin comprender las estructuras conceptuales que la gobiernan, hecho que ya ha sido informado por autores como Fuson et al. (1982), Fuson, (1988, 1992). Como consecuencia, coincidiendo con estos autores, observamos la presencia de la percepción cognitiva del número compuesto por varios dígitos, como una estructura conceptual única, que no les permite valorar el lugar posicional que ocupa cada dígito dentro de la cantidad, y por tanto, no posibilita la representación mental de las distintas agrupaciones de 10, 100, 1000..., que forman parte del basamento conceptual de la resta. Evidencia de ello, son los porcentajes obtenidos en los ítems que evalúan la consecución de los conceptos del sistema Base 10. Así, el control de la serie numérica es mecánico y memorístico tal y como apreciamos en los resultados de los ítems 3 y 6. Este tipo de comportamientos deriva de una instrucción basada en rutinas y el uso abusivo de la reflexión no comprensiva; metodología refutada por autores como Cobb y Wheatley (1988) y Fuson, (1992). Para estos autores, una enseñanza más racional del sistema en base 10, debería enfatizar en la sucesión estricta de los pasos del procedimiento. De este modo, y de acuerdo con estos autores opinamos que, los profesores no han de priorizar reglas y procedimientos, sino una enseñanza comprensiva que se dirija a desarrollar y fortalecer el sentido numérico. Por todo ello, y en relación a la enseñanza del concepto de valor posicional, creemos que los resultados constituyen la proyección de una enseñanza memorística. Autores como Resnick y Omanson (1987), indican que este tipo de enseñanza no se dirige a fortalecer los vínculos o relaciones existentes entre los conceptos que rigen el procedimiento y la parte simbólica y sintáctica del mismo.

En síntesis, los niños/as evaluados en nuestro estudio, no poseen un nivel comprensivo óptimo del sistema decimal. Este dato, ha sido confirmado, en el informe de resultados de la prueba de matemáticas del INCE (2000), en la que el 50% de los alumnos manifiesta problemas con el sistema de numeración decimal.

En segundo lugar, y en relación al fenómeno del decaimiento de la información observado en los resultados de las Tablas III, V y VII; opinamos que la falta de comprensión significativa de los conceptos básicos, produce interferencia en el procesamiento del conocimien-

to procedimental conexo al aprendizaje de los algoritmos. En este caso, la incorrecta organización y elaboración puede ser el factor de explicación de la interferencia y decaimiento a nivel conceptual y procesal que se da y proyecta al ámbito algorítmico. Por tanto, tal y como hemos podido apreciar en el análisis de los ítems, 3, 4 y 5, en continuidad con dicha apreciación, el decaimiento de la información en nuestra muestra estaría relacionado con la falta de comprensión del valor posicional de las cifras en el sistema base 10. Esta idea, explicaría la existencia de errores de base inicialmente conceptual en niños experimentados de los últimos cursos, como pudimos apreciar en la Tabla XIII. La génesis de estas interferencias se ubica en la confluencia entre la naturaleza del propio pensamiento matemático y su incorrecta transmisión. Si unimos esta aseercción, a otra afín en relevancia, como es que la mayor parte de los procesos matemáticos se enseñan a través del libro de texto, que en estos cursos introduce otros objetivos de aprendizaje matemático; las dos justifican el hecho de que se produzca un decaimiento de la información en los cursos señalados (4º y 6º).

En tercer lugar, en relación a la frecuencia de error, podemos encontrar un resultado similar en la investigación llevada a cabo por Young y O´Shea (1981). Los autores encontraron en su investigación un porcentaje del 22% de restas con errores. Nosotros hemos encontrado un porcentaje de un 23,47%. Del mismo modo, la concordancia de resultados entre nuestro estudio y los datos de las investigaciones desarrolladas por otros autores podemos observarlo en las Tablas VIII, X, XI y XII.

En cuarto lugar, aunque se ha puesto de manifiesto la importancia del aprendizaje conceptual, la investigación ha evidenciado, como en el momento de la instrucción ha de estar vinculado al aprendizaje de todos los demás componentes procesales del algoritmo. De este modo, creemos que no existiría un porcentaje tan elevado de casos que muestran errores sistemáticos, que en los resultados presentados se corresponde con un 51,3%. La mayoría de estos, giran en torno al cero y su presencia en el minuendo como indicador de valor posicional dentro de la cifra. En este sentido, opinamos que debemos valorar como fuente de influencia, la deficitaria instrucción de la característica posicional del sistema base 10, que naturalmente incide en la transgresión del principio que fundamenta la conservación de la cantidad en el minuendo, durante un préstamo, Resnick (1987, p.49). Esta última afirmación podemos observarla también en los errores sistemáticos observados en la Tabla XII. Del análisis de los errores que exponemos en esta tabla, inferimos que algunas de las reglas del procedimiento, son trastocadas en su base conceptual, originando errores que, en un principio de carácter semántico o conceptual; se transforman posteriormente en procesales. Para evitarlo, hemos de facilitar la exposición del alumnado a situaciones que favorezcan la generalización del procedimiento de la resta como una operación con operadores, metas, acciones y reglas propias. Todos estos componentes, creemos que habi-

tualmente se presentan inconexos, sin ejemplos apropiados que medien como referente máximo y potencien la comprensión significativa del algoritmo tomado en su conjunto.

En quinto lugar, la relación existente entre el conocimiento conceptual y procesal en la generación del error, nos permitió evidenciar la influencia del conocimiento semántico sobre el procesal, (véase Tabla XIII). De tal manera que los errores en el último curso analizado (6º) tendrían carácter procesal, después de haber invertido la sintaxis del algoritmo, y creado un algoritmo erróneo. Es decir, el conocimiento procesal que contienen estos errores, es resultado de una compilación de conocimiento conceptual inadecuado.

Desde nuestro punto de vista, los profesores tienen que construir los procedimientos aritméticos en base a la comprensión conceptual de principios aritméticos, afirmación que compartimos con Ohlsson y Rees (1991, p.103), que defienden que la comprensión conceptual incide directamente en el procedimiento de ejecución, permitiendo al niño/a revisar sus acciones sobre el algoritmo y detectar posibles errores.

En suma, encontramos dos tipos de errores. Por una parte, los que en su génesis tienen como matriz la influencia conceptual relacionada con la instrucción no adecuada y memorística; y por otra, los que tras una pertinaz generalización de estos procedimientos erróneos, se convierten en procesales. La relación entre ambos conocimientos también ha sido evidenciada en los resultados presentados.

Por último, desde una perspectiva pedagógico-situacional, la investigación realizada tenía como objetivo, efectuar un análisis comparado, entre nuestros resultados, y los encontrados y analizados en las investigaciones llevadas a cabo sobre el aprendizaje algorítmico de la sustracción, por los autores de referencia internacional. Del análisis comparativo llevado a cabo, hemos corroborado en general, en nuestro contexto escolar, las teorías de dichos autores; aportando y transfiriendo así a la investigación educativa sobre nuestro contexto escolar, un conocimiento que opinamos puede ser interesante a la hora de programar el aprendizaje algorítmico en nuestras aulas.

## Prospectiva

Los resultados de la investigación presentada en este artículo, llevan a formular varias propuestas que permiten indagar sobre cuestiones que expliquen con más profundidad algunas situaciones observadas en el mismo. Cada una de estas propuestas, puede ser un posible tema para la investigación.

Consideramos necesaria más investigación centrada en el estudio de las relaciones entre la habilidad de cálculo y la comprensión y reorganización del conocimiento, a través de la práctica algorítmica. Habitualmente se da por hecho que, tal relación, suele adquirirse junto con el número en el proceso de aprendizaje del mismo. En este caso, opinamos que, un procedimiento que involucre la adquisición de estrategias avanzadas de cálculo mental, implica la descomposición y recomposición de cantidades numéricas pequeñas que ya han sido trabajadas con anterioridad en los grados escolares inferiores. Circunstancia que, permite a los niños/as cierta flexibilidad cognitiva en su interacción con los números que componen el algoritmo. Por tanto, el estudio de planteamientos didácticos que potencien tal adquisición, posibilitaría de igual manera la comprensión de las relaciones entre el conocimiento conceptual y procesal durante la práctica algorítmica.

Cabe señalar también la necesidad de un análisis sobre procesos de decaimiento de la información algorítmica, que aunque han sido analizados aquí, constituye un tema interesante en el ámbito de la educación matemática.

## Referencias bibliográficas

- BAROODY, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Aprendizaje-Visor.
- (2003). *The development of adaptive expertise and flexibility: the integration of conceptual and procedural knowledge*. In J. BAROODY & A. DOWKER (eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- BAROODY, A. J. Y GINSBURG, H. P. (1986). *The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic*. In J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- BROWN, J. S. Y BURTON, R. B. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- BROWN, J. S. Y VANLEHN, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- (1982). *Towards a generative theory of 'bugs'*. In T. P. Carpenter, J. M. MOSER y T. A. ROMBERG (eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- BURTON, R. B. (1982). Diagnosing bugs in a simple procedural skill. In D. H. SLEEMAN Y J. S. BROWN (eds.), *Intelligent Tutoring Systems*. New York: Academic Press.
- CARPENTER, T.P.; FRANKE, M.L.; JACOBS, V.R. Y FENNEMA, E. (1996). *Invention and understanding in the development of multidigit addition and subtraction procedures: A longitudinal study*. Annual meeting of the American Research Association, New York.
- COBB, P. y WHEATLEY, G. (1988). Children's initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10 (3), 1-28.
- FUSON, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
- (1992). *Research on Whole Number Addition and Subtraction*. In DOUGLAS A. GROUWS (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Maxwell Macmillan International.
- FUSON, K. Y BRIARS, D.J. (1990). Using base-ten blocks learning/teaching approach for first and second grade place value and multidigit additions and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 180-206.
- FUSON, K.; RICHARDS, J. Y BRIARS, D. (1982). The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence. In CH. J. BRAINERD (ed.): *Children's Logical and Mathematical Cognition Progress in Cognitive Development Research*. New York, Inc. Springer-Verlag.
- GALLISTEL, A. J. Y GELMAN, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43-74.
- GELMAN, R. Y GALLISTEL, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Harvard: Harvard University Press.
- GINSBURG, H.P. (1977). *Children's arithmetic: The learning process*. New York: Van Nostrand.
- GREENO, J. G. (1997). On Claims That Answer The Wrong Questions. *Educational Researcher*, 26 (1), 5-17.
- HIEBERT, J. Y CARPENTER, T. P. (1992). *Learning and teaching with understanding*. In D. A. GROUWS (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- HIEBERT, J.; CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; FUSON, K.; WEARNE, D.; MURRAY, H.; OLIVER, A. Y HUMAN, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- HIEBERT, J. Y WEARNE, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addi-

- tion and subtraction, *Cognition and Instruction*, 251-284.
- HUTTENLOCHER, J.; JORDAN, N.C. Y LEVINE, S. C. (1994): A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology General*, 123, 284-96.
- INSTITUTO NACIONAL DE CALIDAD Y EVALUACIÓN (INCE) (2002): *Indicadores Educativos*. Madrid: MEC.
- KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J. Y FINDELL, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press
- LÓPEZ R. Y SÁNCHEZ, A. B. (2006). Adquisición del error en la sustracción en Educación Primaria. *Proceedings of International Symposium on Early Mathematics*. Publisher by Department of Psychology. University of Cadiz. Research Group HUM-634, Cádiz, 249- 261
- OHLSSON, S. Y REES, E. (1991). The function of conceptual understanding in the learning of arithmetic procedures, in *Cognition and Instruction*, 103-180.
- RESNICK, L.B. (1982). *Syntax and semantics in learning to subtract*. In T.P. CARPENTER; J.M. MOSER y T. ROMBERG (eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- (1983). *A developmental theory of number understanding*. In H. P. GINSBURG (ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.
- RESNICK, L. B. Y OMANSON, S. F. (1987). *Learning to understand arithmetic*. In (ed.): *Advances in instructional psychology*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.
- STEIN; GROVER, B. Y HENNINGSEN, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- VANLEHN, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behaviour*, 3, 3-71.
- (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- (1983). *On the Representation of Procedures in Repair Theory*. In H. GINSBURG (ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.
- (1987). Learning one subprocedure per lesson. *Artificial Intelligence*, 31, 1-40.
- YOUNG, R. Y O´SHEA, T. (1981): Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5, 153-177.
- WU, H. (1999). Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy in mathematics education. *American Educator*, 23, (Fall 1999), 14-19, 50-52.
- ZUR, O. Y GELMAN, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, 121-137.

## Páginas web

GELMAN, R.: *The Brain's Innate Arithmetic*. en <http://www.cloudbreak.ucsd.edu/~Triesch/courses/cogs1/readings/nuñez2.pdf>. 2000  
(Consulta: 15/02/2004)