La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar»

The Mathematical-Didactic Training of Kindergarten Teachers: the Case of how to Teach Counting

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2011-357-059

Tomás Ángel Sierra Delgado
Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Madrid, España.
Marianna Bosch Casabó
Universidad Ramón Llull. Facultad de Economía IQS. Departamento de Estadística Aplicada. Barcelona, España.
Josep Gascón Pérez
Universidad Autónoma de Barcelona. Departamento de Matemáticas. Barcelona, España.

Resumen

El objetivo de este trabajo es diseñar un recorrido de formación para experimentarlo con alumnos de segundo curso de Magisterio de la Universidad Complutense de Madrid. La finalidad de dicho recorrido de formación es responder a la pregunta: «¿Cómo enseñar a contar a alumnos de Educación Infantil?». Para abordar esta cuestión necesitamos plantear y explicitar otra más básica y de carácter epistemológico: «¿Qué es contar en la institución de Educación Infantil?». La metodología utilizada se fundamenta en el postulado de tipo mayéutico, según el cual, toda formación y, en particular, la formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil debe basarse en la dialéctica entre el planteamiento de cuestiones que surgen del quehacer profesional y la construcción de respuestas a estas cuestiones. Dicha metodología tiene un carácter esencialmente cualitativo y se ha fundamentado en la elaboración de un entorno en el que se describen las cuestiones que creemos fundamentales sobre la práctica docente y a las que debe responder la formación del maestro de Educación Infantil.

Entre los resultados más importantes de esta investigación podemos subrayar dos. 1) Se pone de manifiesto que el recorrido de formación diseñado y experimentado permite integrar las cuestiones relativas al «hacer matemáticas» con aquellas que se refieren al «enseñar y apren-

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

der matemáticas». Este resultado es muy relevante puesto que muestra que es posible integrar estas dos dimensiones tradicionalmente separadas en la formación del profesorado de Matemáticas. 2) La metodología utilizada por el diseño del proceso de formación ha hecho patente, por un lado, el papel central de la Didáctica de las Matemáticas y, por otro lado, las ventajas teóricas y prácticas de articular propuestas y resultados obtenidos en dos teorías didácticas distintas pero muy cercanas: la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Teoría de las Situaciones Didácticas, formación de maestros de Infantil, número natural, conteo, cardinación, variable didáctica, situación de aprendizaje por adaptación al medio.

Abstract

The aim of this paper is to design a training program to be implemented amongst second-year Teacher Training students at the Complutense University of Madrid. The purpose of this training program is to respond to the question: «How can kindergarten pupils be taught to count?» In order to tackle this question, a more basic question of an epistemological nature has to be considered and closely examined, i.e. «What constitutes counting in Kindergarten teaching?» The methodology used is based on the axiom that all training, and in particular kindergarten teachers' pedagogical mathematical training, should be based on the dialectic between the raising of topics in professional work and the construction of responses or response elements to these topics. This methodology, with an essentially qualitative character, has been based on the construction of an environment in order to describe the training component's central questions to which Kindergarten teacher training must respond.

The most important results of this investigation are the following: 1) the designed and tested training program allows topics related to «doing mathematics» to be integrated with those that refer to «teaching and learning mathematics». This result is a very important one since it demonstrates that mathematics teacher training programmes are able to integrate these two, previously separate dimensions; and 2) the methodology used for designing the training process has revealed two main issues. On the one hand, the central role of Didactics of Mathematics in teacher training programmes and, on the other, the theoretical and practical advantages of connecting the proposals and results obtained in two distinct, although very close, pedagogical theories: The Theory of Didactic Situations and the Anthropological Theory of the Didactic.

Keywords: didactic of mathematics, the Anthropological Theory of the Didactic, the Theory of Didactic Situations, the training of Kindergarten Teachers, natural number, counting, cardination, the didactic variable, learning situation for adaptation to the medium.

Introducción

Se parte del principio de que la formación del profesorado es, hoy por hoy, un problema de investigación didáctica y, por lo tanto, un problema *abierto*. Ello no significa que la Didáctica de las Matemáticas no esté en condiciones de aportar a este problema un gran número de respuestas parciales, las cuales, en muchos casos, están fundamentadas y contrastadas experimentalmente (Blanco, 2002; Rico, 2004 y Callejo, Llinares y Valls, 2007). En el caso del maestro de Educación Infantil (en adelante, EI), las dificultades que plantea el problema incluyen la particularidad de que el profesor de Matemáticas de EI es polivalente y debe actuar, al mismo tiempo, como profesor de Lengua, Plástica, Educación Física, etc. (MEC, 2007). Este problema puede descomponerse en un conjunto de cuestiones como las siguientes:

- ¿En qué consiste la formación profesional del profesorado de Matemáticas? ¿A qué cuestiones debe responder?
- ¿Cómo pueden describirse (con qué términos, con qué categorías) los «contenidos» matemático-didácticos de dicha formación? ¿Cuáles son las características específicas de dichos contenidos? ¿Qué criterios deben utilizarse para seleccionarlos? ¿Qué papel debe desempeñar la Didáctica de las Matemáticas en su elaboración?
- ¿Qué organización didáctica permitiría llevar a cabo dicha formación en el caso de la Formación de Maestros? ¿Qué tareas didácticas de formación deben realizarse y qué técnicas didácticas se requieren para llevar a cabo este proceso de formación?
- ¿Cómo se puede interpretar y justificar la práctica didáctica encaminada a la formación del maestro de EI? ¿Qué dispositivos didácticos habría que poner en marcha para que esta práctica didáctica pudiese darse en la institución de formación de maestros?
- ¿Por qué se habla de formación «matemático-didáctica»? ¿A qué tipo de formación «matemática» y a qué tipo de formación «didáctica» se hace referencia? ¿Qué relación debe establecerse entre ambos tipos de formación?

Junto con estas cuestiones, aparece otro problema didáctico de gran envergadura y que no trataremos aquí: el de la formación necesaria para *dirigir* la formación de los futuros maestros. Este tema ya ha sido abordado por otros investigadores y constituye hoy día un campo de estudio abierto para nuestra comunidad (COPIRELEM, 1997-2002;

Blanco y Contreras, 2002; Sánchez y García, 2004 y Robert y Pouyanne, 2005). Solo postulamos aquí que la *formación de formadores* está siempre muy vinculada al *desarrollo de la investigación didáctica* y a la *difusión* de sus resultados en el seno de la cultura escolar.

En la primera sección de este trabajo, presentamos una breve fundamentación teórica de nuestra propuesta de formación del profesorado de EI así como el conjunto de cuestiones problemáticas que situamos en el corazón mismo de esta formación. A continuación, describimos brevemente la metodología utilizada en el diseño de dicha propuesta y enfatizamos su vinculación con dos marcos teóricos de Didáctica de las Matemáticas: la Teoría Antropológica de lo Didáctico y la Teoría de las Situaciones Didácticas. Luego, hemos desarrollado una propuesta concreta de formación para maestros de EI, que nosotros hemos llamado recorrido de formación en torno a la actividad de contar. El estudio concluye señalando la importancia de poner en marcha itinerarios semejantes en torno a las cuestiones que creemos cruciales para la profesión de maestro de EI.

Una formación organizada en torno a un conjunto de cuestiones

De acuerdo con los principios de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en la que se inscribe nuestro trabajo (Chevallard, 2001, 2004*a,* 2004*b* y 2007), y en claro acuerdo con la mayoría de los enfoques educativos, postulamos que cualquier proceso de formación toma sentido a partir del estudio de un conjunto de cuestiones problemáticas al que los estudiantes deben aportar elementos de respuesta. La dialéctica entre el planteamiento de cuestiones problemáticas y la construcción de elementos de respuesta constituye así la razón que fundamenta el proceso de formación.

Cuando hablamos de basar la formación del profesorado de Matemáticas en el estudio de las cuestiones problemáticas, no nos referimos tanto a las cuestiones y dificultades que surgen como necesidades personales de los futuros profesores, sino a aquellas que son propias de la profesión de profesor de Matemáticas, en nuestro caso del profesor de Matemáticas de EI (Llinares, 1998; Fernández Enguita, 2001; Blanco, 2002 y Cirade 2006). Con esto queremos subrayar, por un lado, el carácter abierto de la problemática de la profesión de profesor (en el sentido de que no existen respuestas definitivas y completas a las cuestiones que constituyen dicha problemática) y, por

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

otro, el hecho de que se trata de una problemática más institucional que personal. Así pues, el primer problema que planteamos es el de determinar cuáles son las cuestiones problemáticas a las que debe responder la formación del profesorado de Matemáticas de EI y cómo pueden estructurarse para organizar un programa de formación.

Postulamos que la Didáctica de las Matemáticas puede (y debe) ocuparse de todas las cuestiones docentes en cuya respuesta intervienen las Matemáticas en alguna medida y que, además, de momento se presenta como la única disciplina capaz de integrar las cuestiones relativas al «hacer» y al «enseñar» Matemáticas (Puig, 2005)[1]. Para ello, es importante partir de las cuestiones que hacen referencia a las Matemáticas como un todo o, al menos, a alguna de las áreas[2] en que se estructuran las Matemáticas en la EI, a saber:

- Actividades lógicas:
  - Simbolización.
  - Clasificaciones y ordenaciones.
  - Estudio de las regularidades (ritmos y algoritmos).
- El número natural:
  - Número cardinal.
  - Número ordinal.
- Iniciación a la medida:
  - Iniciación a las medidas de longitud.
  - Iniciación a las medidas de tiempo.
  - Iniciación a las medidas de capacidad.
  - Iniciación a las medidas de peso.
  - Iniciación a las medidas de superficie.
- Conocimientos espaciales y geométricos:
  - Posiciones relativas de los objetos en el espacio.
  - Desplazamientos orientados.
  - Estudio de formas geométricas planas.
  - Estudio de formas geométricas tridimensionales.

(1) La formación matemático-didáctica de los maestros de EI en la Universidad Complutense la constituyen tres asignaturas: una carácter con matemático, «Fundamentos de Matemáticas», y dos de carácter didáctico, «Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica» y «Didáctica de las Matemáticas en la EI». Sin embargo, nosotros creemos que debe buscarse una formación que integre lo didáctico y lo matemático.

(2) Para la elaboración de este programa en el caso de la Universidad Complutense de Madrid hemos utilizado como referencia los currículos de EI de Francia y de España y, sobre todo, las investigaciones realizadas por Guy Brousseau y sus colaboradores.

Sin pretender ser exhaustivos, proponemos algunas de las cuestiones matemático-didácticas que forman parte de la problemática docente del maestro de EI:

- ¿Cómo se interpretan las Matemáticas en la EI? ¿Cómo condiciona esta interpretación la forma de enseñar Matemáticas? Dentro de la profesión de maestro tiene una importancia fundamental ser capaz de explicitar lo que llamaremos el *modelo epistemológico dominante* (Gascón, 2001), es decir, el conjunto de nociones, herramientas y creencias que se usan para describir, interpretar, organizar, desarrollar y evaluar las Matemáticas que se enseñan. ¿En qué medida dicho modelo epistemológico es explícito? ¿Qué términos se utilizan, por ejemplo, en los documentos curriculares oficiales? ¿En qué medida son útiles para la profesión? ¿Qué modelos alternativos se utilizan (por ejemplo, en Didáctica de las Matemáticas) o podrían utilizarse?
- ¿Cuál es la función de las Matemáticas en nuestra sociedad?
- ¿Por qué hay que estudiar Matemáticas? ¿Para qué sirven los conocimientos matemáticos? ¿Qué significa hacer Matemáticas en EI? ¿Por qué unas actividades reciben el calificativo de 'matemáticas' y otras no?
- ¿Qué Matemáticas hay que enseñar en la EI y en los primeros cursos de la Educación Primaria?
- ¿Cuáles son las cuestiones cruciales para la EI en cuya respuesta intervienen de manera central las Matemáticas? ¿Cuáles de dichas cuestiones tienen una fuerte legitimidad funcional, en el sentido de que facilitarán el acceso a los conocimientos de Primaria? ¿De qué modo podemos integrar el uso de las nuevas tecnologías en el estudio de las cuestiones matemáticas en la EI?
- ¿Qué tipo de actividad matemática es posible realizar en la EI? ¿Qué cuestiones constituyen la razón de ser de los conocimientos matemáticos de la EI? ¿Qué diferencia hay entre las cuestiones que permiten al alumno construir conocimiento matemático y las que requieren el dominio de dicho conocimiento? ¿Qué diferencias hay entre las actividades funcionales, las rituales, los juegos de sociedad y aquellas diseñadas para que el alumno construya un conocimiento determinado?
- ¿Qué relación existe entre los conocimientos espaciales y los geométricos? ¿Cuál es el origen de los conocimientos espaciales (Gálvez, 1985; Berthelot y Salin 1992; Salin, 2004)? ¿Y de los geométricos? ¿Cuándo se puede decir que un problema es espacial y cuándo que es geométrico? ¿En qué medida los

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

problemas espaciales son la razón de ser de los conocimientos geométricos? ¿Qué conocimientos geométricos son una buena herramienta para resolver problemas espaciales?

- ¿Cuáles son las cuestiones cuya respuesta requiere poner en funcionamiento las actividades lógicas que forman parte del currículo de la EI? ¿Por qué hay que enseñar los conocimientos lógicos en la EI? ¿Cómo hay que gestionar la lógica natural de los «predicados amalgamados» (Orús, 1992)? ¿Cuáles son los objetivos que se pretenden con el estudio de los rudimentos de la lógica? ¿Los conocimientos lógicos son importantes en sí mismos o son más bien un instrumento para el estudio del número y de la medida de magnitudes continuas? ¿Qué relación existe entre los conocimientos espaciales y geométricos y el estudio de las regularidades? ¿Y entre el estudio de las regularidades y el estudio del número?
- ¿Qué tipo de cuestiones permiten la iniciación al estudio de la medida de magnitudes? ¿Qué tipo de magnitud (longitud, área, tiempo, peso, volumen, etc.) es la más apropiada para iniciar el estudio de la medida de magnitudes? ¿Qué características especiales tienen las cuestiones que deben utilizarse en este inicio?
- ¿Cómo se puede relacionar el estudio del número con el de las clasificaciones y ordenaciones, la medida de magnitudes y el estudio de las regularidades? ¿En qué medida las cuestiones utilizadas para el estudio de las clasificaciones y ordenaciones constituyen una preparación para el estudio del número? ¿En qué se diferencian las cuestiones que se utilizan para el estudio del número natural de las utilizadas para dar sentido al estudio de la medida de magnitudes continuas?
- En EI, ¿qué se entiende por «contar»? ¿Qué significa «enseñar a contar»? ¿Cuáles son las cuestiones que originan el estudio de las actividades denominadas «prenuméricas»? ¿Cómo se relacionan estas cuestiones con las que dan lugar a la actividad de contar propiamente dicha?

Consideramos que este conjunto de cuestiones (y otras del mismo tipo que no hemos incluido aquí) deberían estar más o menos presentes en cualquier proyecto de formación de maestros, aunque es evidente que, dadas las restricciones curriculares, no pueden tratarse todas con la misma profundidad. Presentamos en este trabajo una propuesta de proceso de formación.

Metodología del diseño de la formación: un diálogo entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico y la Teoría de Situaciones Didácticas

Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante, TAD), para diseñar un proceso de formación como el que hemos esbozado, debemos empezar describiendo, por un lado, la organización matemática que es posible construir en la institución de EI y, por otro, la organización didáctica que permita reconstruir dicha organización matemática en la institución dotándola de sentido. Una vez que tengamos elementos para responder a dichas cuestiones queda todavía el problema de cómo incorporarlos en un proceso concreto de formación del maestro de EI.

Por lo tanto, nos planteamos dos problemas que son, de hecho, inseparables:

- Por un lado, un problema de ingeniería matemática: la construcción detallada de los componentes de la organización matemática que está en juego.
- Por otro lado, un problema de ingeniería didáctica: el diseño de una organización didáctica que haga posible que una organización matemática como la anterior se genere, viva y se desarrolle adecuadamente en la institución de EI.[3]

Para formular y abordar ambos problemas de manera coherente y eficaz, es necesario situarse en el ámbito de un enfoque teórico concreto. En nuestro caso, nos situaremos explícitamente en el programa epistemológico de investigación en Didáctica de las Matemáticas y, en particular, en la TAD. Sin embargo, no renunciamos, a pesar de las dificultades teóricas que este *eclecticismo limitado* puede provocar, a utilizar algunas herramientas y resultados de la Teoría de Situaciones Didácticas (en adelante, TSD), por tres motivos principales:

- La TSD es la teoría didáctica fundadora del programa epistemológico y, como tal, comparte con la TAD los principales presupuestos epistemológicos.
- Las investigaciones relativas a la EI están mucho más desarrolladas en la TSD que en la TAD y la reinterpretación de dichas investigaciones, utilizando las herramientas que proporciona la TAD, se ha mostrado muy fecunda (Sierra, 2006).
- Existe una cierta «concordancia» entre las nociones básicas de ambas teorías: la «situación» como noción básica de la TSD y la «praxeología» u organización

(3) Ruiz y García (2008) desarrollan con mayor detalle el análisis de las relaciones que se establecen entre la organización matemática y la organización didáctica en el ámbito de la formación del profesorado.

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

matemática (asociada a un «tipo de tareas» en una institución dada) como noción básica de la TAD (Sierra, 2006, p. 269).

A continuación mostraremos, como ejemplo, elementos de respuesta a las cuestiones «¿Qué es contar?» y «¿Cómo enseñar a contar en EI?» que provienen de trabajos llevados a cabo en el ámbito de la TSD. Nuestra propuesta es reinterpretarlos en términos de organizaciones matemáticas y didácticas para explicitar más claramente el modelo epistemológico subyacente y para poder analizar de manera más precisa las relaciones entre «lo matemático» y «lo didáctico».

Un posible recorrido de formación en torno a la actividad de contar

A continuación se describe un posible recorrido de formación que podría utilizarse en la formación de los maestros de EI. Tomaremos como punto de partida la siguiente cuestión generatriz:

Q: En Educación Infantil, ¿qué se entiende por «contar» y qué significa enseñar a contar?

Expresaremos un recorrido de formación como una dialéctica entre cuestiones problemáticas y (elementos para elaborar) respuestas a dichas cuestiones. Como en todo proceso de formación, el núcleo del estudio lo constituyen las cuestiones que van apareciendo a medida que avanza el proceso. Dado que estas no pueden determinarse de antemano, es evidente que las que proponemos aquí pueden modificarse y ampliarse en función de la dialéctica concreta que se establezca en cada proceso concreto de estudio.

La razón de ser de los números naturales en Educación Infantil

La problemática inicial en torno a las posibles razones de ser de la actividad de contar depende, en primera instancia, de los usos y funciones más básicos de los números naturales. Dicha problemática se puede concretar en el siguiente conjunto inicial de cuestiones que presentamos aquí formuladas de distintas maneras:

Q1: ¿Qué tipos de problemas dan sentido al número natural en sus aspectos cardinal y ordinal? ¿Cuáles son las cuestiones (la razón de ser) cuya respuesta requiere como estrategia óptima en EI el uso de los primeros números naturales? ¿Qué usos les damos a los números naturales? ¿Para qué sirven en EI los números naturales? ¿Existe algún tipo de tarea que es previa y que prepara y ayuda a la construcción del número natural?[4]

Para responder a estas cuestiones puede establecerse una discusión en pequeños grupos, y luego realizar una puesta en común con toda la comunidad de estudio. La intención es llegar a una síntesis y una institucionalización de los diferentes tipos de problemas que dan sentido al número.

Para la búsqueda de respuesta pueden utilizarse algunos textos escolares como los siguientes: Fuson, Richards y Briars, 1982; Castro, Rico y Castro, 1988; Bermejo y Lago, 1991; Briand, Loubet y Salin, 2004; Briand y Chevalier, 1995; Chamorro, Belmonte, Ruiz Higueras y Vecino, 2005; Dubois, Fénichel y Pauvert, 1993; Martin, 2003*a* y 2003*b;* Ermel, 1990; Pierrard, 2002; Fernández, 2004*a* y 2004*b* y Valentin, 2005*a* y 2005*b*. A partir de las informaciones de dichos textos se puede concluir, por ejemplo, que para diseñar *situaciones de enseñanza* que requieran de los primeros números, podemos:

- Situarnos fuera del contexto de enseñanza y buscar cuáles son los tipos de problemas en los que la cardinación mediante la cantilena es la mejor herramienta de resolución.
- Trabajar su adaptación a las capacidades y a los intereses de los niños de la Escuela Infantil.

Según Briand, Loubet y Salin (2004) pueden encontrarse diferentes tipos de situaciones:

- Situaciones en las que el nombre del número se utiliza para construir una colección, por ejemplo: tengo invitados y quiero poner la mesa antes de que lleguen.
- Situaciones en las que los nombres de los números se utilizan para comparar dos colecciones: al terminar un juego, ¿quién ha ganado?

(4) Entre las situaciones que podemos considerar prenuméricas están las situaciones de enumeración (Briand, 1993 y Briand, Loubet y Salin, 2004). En Briand, Loubet y Salin (2004) y en Chamorro, Belmonte, Ruiz Higueras y Vecino (2005) se hallan situaciones que permiten el estudio específico de la enumeración.

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

- Situaciones en las que el nombre del número se utiliza para designar o memorizar una posición en una fila: indico el camino a alguien: «Tiene que girar en el tercer semáforo».

Una vez analizadas algunas de las respuestas culturalmente disponibles, podemos hacer propuestas para discutir con la comunidad de estudio. Así, por ejemplo, siguiendo a Briand, Loubet y Salin (2004) pueden proponerse las siguientes cuestiones generatrices de la organización matemática en torno al «conteo».

- Por lo que se refiere al aspecto cardinal:
  - Dada una colección, ¿cómo se puede construir/obtener otra colección que tenga tantos elementos como la primera, en ausencia de esta?
  - Dadas dos colecciones, ¿cómo se puede determinar cuál de las dos tiene más elementos cuando ambas colecciones están alejadas?
- Por lo que se refiere al aspecto ordinal:
  - Dada una colección de objetos organizados en una fila, ¿cómo se puede determinar la posición de un objeto señalado en la fila sin disponer de ninguna referencia que lo identifique?

Si enfrentamos a los alumnos de EI con dichas cuestiones mediante un *encuentro en situación* es obvio que estas presentarán diferentes grados de dificultad en función de los valores que tomen las siguientes variables:

- El tamaño de la colección.
- La disposición de los elementos.
- El tipo de comunicación.
- El tamaño de los números que el alumno puede utilizar.
- El número de viajes que se permite realizar para ir de una colección a la otra.
- La accesibilidad simultánea a las dos colecciones (esta variable solo puede tomar dos valores).
- El hecho de que los objetos de las colecciones tengan o no movilidad (dos valores).
- La proximidad o lejanía del objeto señalado respecto a los extremos de la fila.

Siguiendo el espíritu de la TSD, puede proponerse para la discusión un proceso de estudio en el que los alumnos de EI, guiados por la evolución progresiva de la situación a la que se enfrentan, deberán ir modificando sucesivamente la estrategia que utilizan para poder resolver los problemas que van apareciendo.

El problema de las técnicas matemáticas en la iniciación al conteo

De acuerdo con la terminología de la TAD podemos interpretar la *evolución progresiva de la situación* como la evolución de la organización matemática que se está construyendo. Dado que la génesis y el desarrollo de las organizaciones matemáticas se asocian al desarrollo de las técnicas, aparecerán cuestiones relativas a los tipos de técnicas matemáticas que pueden utilizarse en la institución de EI para llevar a cabo tareas potencialmente útiles para iniciar a los alumnos de EI en el conteo.

> *Q2:* ¿De qué técnicas matemáticas disponen los alumnos de EI para llevar a cabo las tareas útiles en la iniciación al conteo y en la utilización funcional de los números naturales? ¿Qué otras técnicas de cardinación mejoran en eficacia y economía a la técnica del conteo? ¿Qué relación existe entre dichas técnicas? ¿Podría esquematizarse un proceso de desarrollo progresivo de ellas?

Puede iniciarse la discusión a partir de las técnicas matemáticas que están disponibles en la institución (o en otras instituciones) y que, por lo tanto, los alumnos de EI pueden utilizar para llevar a cabo las tareas citadas anteriormente:

- Dada una colección, ¿cómo se puede construir/obtener otra colección que tenga tantos elementos como la primera, en ausencia de esta?
- Dadas dos colecciones, ¿cómo determinar cuál de las dos tiene más elementos cuando ambas colecciones están alejadas?
- Dada una colección de objetos organizados en una fila, ¿cómo determinar la posición de un objeto señalado en la fila si no se dispone de ninguna referencia que lo identifique?

Un análisis de la bibliografía citada permite reconocer algunas de las técnicas que ya hemos descrito en Sierra 2006, pp. 272-274, tales como:

- «La correspondencia término a término» o «Correspondencia uno a uno».
- «La correspondencia grupo a grupo».

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

- «La estimación puramente visual». Consiste en comparar una colección con otra, ya esté presente o ausente, utilizando su disposición espacial. Es muy poco fiable.
- «El reconocimiento inmediato de la cantidad». Consiste en enunciar rápidamente el número de elementos de una colección sin necesidad de contar explícitamente. Solo se utiliza para colecciones con un número no mayor de cinco o seis.
- «La técnica de conteo». Técnica compleja que puede descomponerse en el siguiente sistema de subtécnicas:
  1. Distinguir dos elementos diferentes de un conjunto dado.
  2. Reconocer la pertenencia o no de todos los elementos a la colección.
  3. Elegir un primer elemento de la colección.
  4. Enunciar la primera palabra-número (uno).
  5. Determinar un sucesor en el conjunto de elementos que todavía no han sido elegidos.
  6. Atribuir una palabra-número (la siguiente en la serie de palabras-número) al sucesor.
  7. Conservar en la memoria las elecciones anteriores.
  8. Volver a comenzar en los pasos 5) y 6), pero sincronizándolos en uno solo.
  9. Discernir cuándo se ha elegido el último elemento.
  10. Enunciar la última palabra-número.
  11. Considerar que la última palabra que se ha dicho es el cardinal de toda la colección.[5]

  En otras palabras, el conteo es un medio de cardinar[6] una colección, que establece una correspondencia de uno a uno entre cada objeto de la colección y una (y una sola) palabra-número. Esto supone dominar la enumeración.[7] Además, hay que memorizar la cantilena numérica (uno, dos, tres, etc.) en el orden correcto y tener en cuenta que la última palabra-número enunciada en el conteo designa una propiedad de la colección de objetos. Esto se hace utilizando los cinco principios propuestos por Gelman (1983).
- «La escritura aditiva con agrupamientos no necesariamente equipotentes». Consiste en realizar paquetes no necesariamente equipotentes y a continua-

(5) Consiste en pasar de considerar la última palabra-número enunciada como una propiedad del último elemento a considerarla como una propiedad (el cardinal) de toda la colección.

(6) «Cardinar una colección» consiste en atribuir a una colección el nombre o la escritura de su cardinal (el número de sus elementos) por cualquier procedimiento.

(7) «Enumerar una colección» consiste en pasar revista una sola vez a cada elemento de la misma. Aunque etimológicamente esta palabra se refiere al número, esta acción no necesita el conocimiento de los números. Podríamos decir que, de entre las acciones que es necesario llevar a cabo para contar, las que están indicadas en cursiva corresponden a la acción de enumerar (Briand, 1993).

ción expresar el número de elementos de la colección oralmente o por escrito del número de elementos de cada paquete. Así, de una colección de 65 elementos, se puede decir que tiene 12 y 9 y 8 y 13 y 7 y 10 y 6 elementos, o también, 12 + 9 + 8 + 13 + 7 + 10 + 6 elementos.

- «La escritura aditiva con agrupamientos equipotentes». Consiste en realizar agrupamientos equipotentes. Así, de una colección de 65 elementos, podremos decir que hay 9 y 9 y 9 y 9 y 9 y 9 y 9 y 2 elementos o, también, 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 2 elementos.
- «La escritura aditiva con agrupamientos equipotentes y el mismo tipo de agrupamiento para todas las colecciones».
- «La escritura aditivo-multiplicativa». Consiste en realizar agrupamientos equipotentes y luego contar el número de grupos equipotentes y el número de elementos sueltos, de modo que la expresión del número de elementos de la colección va a contener dos tipos de símbolos: uno que indicará el número de agrupamientos y otro que indicará el número de elementos que tiene cada grupo. Así, de la colección de 65 elementos, se puede decir que tiene 7 grupos de 8 y 9 elementos o, también, de forma más reducida, 7 de 8 y 9 elementos. Se trata de escribir el número mediante la forma «n de b y a», donde $b \geq 2$ y n y a cualesquiera.
- «La escritura aditivo-multiplicativa del tipo "n de b y a", donde $b \geq 2$, $a < b$ y n cualquiera».
- «La escritura aditivo-multiplicativa del tipo "n de b y a", donde $b = 10$, $a < b$ y n cualquiera».
- «La escritura posicional en base 10».

La discusión debería abordar el problema de la posible «jerarquía» entre dichas técnicas y su «desarrollo» progresivo en manos de los alumnos de Educación Infantil. Se trata, en definitiva, del problema de diseñar una organización didáctica en Educación Infantil que suscite el desarrollo de dichas técnicas en la dirección adecuada.

Diferentes tipos de situaciones de aprendizaje o procesos de estudio

Dado que no es previsible que los propios estudiantes lleven a cabo este desarrollo de manera completamente autónoma, surge aquí la cuestión general de qué condiciones debe cumplir una organización didáctica (o una situación de aprendizaje) en EI para

Revista de Educación, 357. Enero-abril 2012, pp. 231-256
Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

que –además de integrar la «razón de ser de la organización matemática que se quiere reconstruir– sea capaz de potenciar el desarrollo del proceso de estudio en una dirección adecuada.

> *Q3:* ¿Cuáles son las diferentes formas de aprendizaje y qué condiciones debe tener una situación para permitir que los alumnos construyan un conocimiento dándole sentido? En la terminología de la TAD, ¿qué características debe tener un proceso de estudio para que se pueda considerar «funcional»?

Para responder a estas cuestiones puede establecerse de nuevo una discusión en pequeños grupos. Probablemente, aparecerá la necesidad de analizar qué tipos de *situaciones de aprendizaje matemático* se presentan en la EI.

De nuevo, una breve revisión bibliográfica nos proporciona algunos elementos de respuesta a dicha cuestión. Habrá que combinar informaciones generales (válidas para cualquier organización matemática) con otras más específicas relativas al caso de los números naturales en EI. En general, una *situación de aprendizaje* es una situación reproducible que permite que un individuo adquiera saberes o conocimientos de forma regular. Siguiendo a Chevallard, Bosch y Gascón (1997), para que una situación se adapte al estudio de una nueva cuestión debe cumplir dos condiciones:

- Debe ser posible elaborar la situación con materiales pertenecientes al medio matemático de los alumnos, es decir, al conjunto de objetos cuyas propiedades se dan más o menos por sentado y que se pueden manipular de forma bastante segura. Es preciso que los alumnos tengan con ellos una verdadera familiaridad matemática.
- La situación debe generar algunas de las cuestiones que dan origen a la obra que se quiere estudiar.

Desde la perspectiva de la TSD, podemos considerar esencialmente dos formas de aprendizaje (Briand, Loubet y Salin, 2004):

- Aquellas en las que el aprendizaje se hace por familiarización, es decir, el alumno comprende el problema y lleva a cabo la actividad que le muestra o le explica alguien que sabe más, ya sea el maestro u otro alumno.
- Aquellas en las que el conocimiento que se busca no lo enseña el maestro de manera directa, sino que puede aparecer progresivamente en el alumno a partir de múltiples modificaciones en las estrategias utilizadas. Este segundo tipo de aprendizaje se denomina *aprendizaje por adaptación al medio.*

La diferencia fundamental entre las situaciones de *aprendizaje por familiarización* y las de *aprendizaje por adaptación al medio* radica en el modo en que los alumnos son conducidos a producir la solución al problema planteado y no en las producciones finales de los alumnos. El aprendizaje del alumno se identifica por los cambios de estrategia que este lleva a cabo a medida que la tarea que tiene que realizar evoluciona. Para enseñar, el maestro debe proponer situaciones en las que el saber que se pretende es la *estrategia óptima*. Entonces, se tendrán en cuenta las características más importantes de una situación de *aprendizaje por adaptación al medio* (o de las *situaciones adidácticas*, tal como las denomina la TSD) explicitadas en Sierra 2006, p. 269.

En contraposición, las características principales de una situación de *aprendizaje por familiarización* son las siguientes:

- Se trata de situaciones en las que se solicita explícitamente el propio saber.
- Son situaciones de aplicación de un saber.
- Son necesarias en un momento determinado del aprendizaje para asegurarse de que el alumno ha adquirido el saber que se pide.[8]

Después de esta discusión general sobre las condiciones que debe satisfacer una situación de aprendizaje, podemos plantearnos cuál es la relación entre una *situación adidáctica* (en el lenguaje de la TSD) y un *proceso de estudio funcional* (en la terminología de la TAD). Pero esta es una discusión excesivamente teórica más propia para un máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

La cuestión que con toda seguridad debe aparecer en la discusión es la de cómo diseñar una situación de aprendizaje que inicie a los alumnos de EI en el uso funcional de los números naturales.[9] Para ello, en lugar de pedir a los estudiantes que hagan propuestas concretas sobre posibles situaciones de enseñanza, proponemos organizar la discusión de la siguiente forma: se les presenta la descripción de dos o más situaciones y se les pide que las analicen, las comparen y las evalúen con los criterios que se han ido delimitando a lo largo del proceso de formación.

---

(8) Hay otro tipo de situaciones que también tienen como característica la aplicación de un saber y son aquellas que se utilizan como situaciones de control, de entrenamiento y de refuerzo. Estas situaciones también son necesarias para la construcción del conocimiento.

(9) En un trabajo anterior hemos aportado una primera respuesta a este problema (Sierra, 2006, pp. 267-296) utilizando las investigaciones llevadas a cabo por Guy Brousseau y sus colaboradores en el ámbito de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Ahora adaptamos esa propuesta al caso de la Educación Infantil con la ayuda del material contenido en el cd-rom de Briand, Loubet y Salin (2004).

Revista de Educación, 357. Enero-abril 2012, pp. 231-256
Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

Los dos tipos de situaciones que hemos elegido son las siguientes:[10]

Primera situación

Material

Diversas colecciones de objetos (lápices, pelotas, muñecos, etc.). Fichas con dibujos de colecciones de objetos en las que se pide escribir el número o bien, al contrario, fichas con la escritura del número dibujada y un hueco en el que el alumno debe dibujar la colección de objetos correspondiente.

Desarrollo

Los alumnos están sentados en círculo en la alfombra y la maestra les muestra una de estas colecciones y les pregunta: «¿Cuántos elementos hay en esta colección?».

Los alumnos ya han visto en clases anteriores la escritura hasta el 6 y hoy la maestra quiere introducir la escritura de 7 y 8.

Para ello, la maestra pide a los alumnos que formen colecciones de siete u ocho objetos y a la inversa, que digan cuántos objetos hay en las colecciones que muestra.

Después de algunos ejercicios de este tipo, la maestra les dice: «Bien, hoy os voy a enseñar a escribir los números 7 y 8».

Los alumnos aprenden el grafismo de las cifras 7 y 8 y luego hacen ejercicios del tipo explicado anteriormente en fichas. En estas, aparece una colección de elementos dibujados y el alumno debe escribir el número de elementos de dicha colección o bien aparece escrito el número de elementos que tiene una colección y el alumno debe dibujar dicha colección. Cuando los alumnos son capaces de realizar bien las fichas pedidas, el proceso didáctico continúa de manera similar con el aprendizaje del 9.

Segunda Situación: «El juego de poner la mesa»

Material

Una colección de 20 platos, una caja con una colección de 25 cubiertos de cada clase (cucharas, tenedores, vasos y cuchillos de plástico), una mesa y cuatro cestas para transportar los cubiertos. Papel y lápiz para escribir los mensajes.

Desarrollo

El juego se lleva a cabo en varias etapas:

- Primera etapa: la actividad se realiza en un taller de cuatro alumnos. La maestra coloca los platos en la mesa y propone a cada alumno que traiga los cubiertos

[10] La primera situación la hemos diseñado a partir de Gairín-Calvo (1988) y la segunda, a partir de Briand, Loubet y Salin (2004).

necesarios para que haya uno por cada plato. En esta primera etapa, la caja de los cubiertos está al lado de la mesa en la que se han colocado los platos.

- Segunda etapa: se propone la misma actividad en un taller de cuatro alumnos, pero ahora la caja de los cubiertos está en un lugar desde el que no es posible ver los platos. La consigna que da la maestra es: «Debéis traer los cubiertos necesarios para que haya exactamente uno por cada plato». Entonces, un alumno irá a buscar las cucharas, otro los tenedores, etc. Al principio, los alumnos pueden realizar los viajes que deseen, pero posteriormente la maestra debe proponer: «Debéis traer en un solo viaje los cubiertos necesarios para que haya exactamente uno por cada plato». Cuando cada alumno trae su colección de cubiertos en la cesta, la maestra pregunta: «¿Crees que traes justo un cubierto para cada plato?». A continuación, los compañeros y el propio alumno pueden comprobar si han resuelto bien la tarea propuesta o no.
- Tercera etapa: el juego se convierte en una situación de comunicación escrita. La maestra dice: «Hoy, tú no irás a buscar los cubiertos sino que se lo encargarás a un compañero mediante un mensaje escrito. Para ello, yo te daré una colección de platos y deberás indicarle a tu compañero (que no ve la colección de platos) mediante un mensaje escrito que traiga los cubiertos necesarios para que haya exactamente uno por cada plato». La maestra realiza un sorteo para asignar a cada alumno emisor un compañero receptor. Una vez que el alumno receptor trae la colección de cubiertos pedidos, ambos alumnos comprueban si se ha resuelto bien la tarea propuesta o no. El juego se realizará varias veces y los alumnos intercambiarán sus papeles.

Análisis de organizaciones didácticas de iniciación a la actividad de contar

Dado que los criterios con los que puede analizarse una organización didáctica son difíciles de construir de manera espontánea por los futuros maestros de EI, se puede proponer un conjunto de cuestiones relativas a cada una de las situaciones descritas. Es de esperar que el estudio de estas cuestiones ayude construir una técnica didáctica de análisis de situaciones de enseñanza.

Q4: (a) ¿Qué tipo de problemas se propone a los alumnos?
(b) ¿Qué características de la situación son propias de una situación de aprendizaje por familiarización y cuáles lo son de una de aprendizaje por adaptación al medio?

Revista de Educación, 357. Enero-abril 2012, pp. 231-256
Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

(c) ¿Cuáles son las variables didácticas?, esto es, ¿cuáles son los elementos de la situación que el maestro puede modificar y que afectan a la jerarquía de estrategias de resolución (por el coste, la validez, la complejidad, etc.)?
(d) ¿Cuáles son las técnicas que puede utilizar el alumno para realizar las tareas que se proponen? ¿Cuál es la técnica inicial o técnica de base que permite al alumno entrar en el problema y empezar a resolverlo? ¿Cuáles son las técnicas más eficaces, más económicas? ¿Cuál es la óptima? ¿Cómo se relaciona la evolución de las técnicas con las variables didácticas? ¿Cómo podrían desarrollarse las técnicas hasta producir la técnica óptima?
(e) ¿Quién valida las posibles soluciones que los alumnos aportan al problema? ¿De qué técnicas de validación disponen los alumnos?

La primera pregunta (a) pretende que el alumno de Magisterio identifique el tipo de tarea que se propone. Para ello, es necesario e interesante estudiar y descubrir cuáles son los diferentes tipos de cuestiones cuya respuesta requiere la utilización del *número natural* de manera esencial. Se trata de que el futuro maestro ubique cada una de las situaciones anteriores dentro del campo de problemas que dan sentido al número natural.

La discusión en torno a la segunda de las cuestiones (b) puede desembocar en la siguiente conclusión: la primera situación se puede caracterizar como una situación de *reproducción pasiva* y la segunda como una situación de *apropiación consciente y motivada de los conocimientos.* Aparece asimismo la necesidad de plantear explícitamente y de entrada aquellas cuestiones cuya resolución requiere de los conocimientos matemáticos que queremos enseñar. Solo así los niños puedan apropiarse de los conocimientos dándoles sentido, es decir, encontrando su razón de ser. Otra forma de expresar lo anterior sería decir que la primera situación es una situación de *familiarización* y la segunda, de *aprendizaje por adaptación al medio*.

En las cuestiones (c) y (d) aparecerá la relación entre la identificación de las diferentes variables didácticas y las técnicas que pueden utilizarse para resolver la tarea propuesta. Mientras que en la primera situación no cabe hablar propiamente de «variables didácticas», en la segunda, los maestros en proceso de formación pueden identificar, al menos, las siguientes:

- El tamaño de la colección. Porque si $n < 6$, el alumno puede utilizar el reconocimiento inmediato de la cantidad, pero si $n > 6$, entonces empleará la correspondencia término a término, la correspondencia grupo a grupo o el conteo. A medida que *n* aumenta, la correspondencia término a término y la correspondencia grupo a grupo dejan de ser eficaces para dejar paso al conteo. Y cuando *n* supera el número al que se es capaz de llegar mediante la cantilena, la técnica del conteo se vuelve ineficaz y se puede utilizar la escritura aditiva.

- La disposición espacial de la colección de platos. Si la colección está colocada de forma ordenada el alumno puede utilizar la estimación puramente visual, pero si dicha colocación no tiene una forma regular el alumno tendrá que emplear la correspondencia término a término, la correspondencia grupo a grupo o el conteo. Además, la disposición en grupos y un tamaño grande de la colección provocarán que el alumno utilice la escritura aditiva. Además, si la colección está dispuesta en forma de tabla rectangular y su tamaño es grande podemos inducir al alumno a que utilice la escritura aditivo-multiplicativa.
- El tipo de comunicación (autocomunicación, comunicación oral y comunicación escrita). Si la tarea se plantea mediante la autocomunicación, el alumno puede emplear la correspondencia término a término, la correspondencia grupo a grupo o la estimación puramente visual, si ambas colecciones no están alejadas y su tamaño no es grande. Pero si el tamaño es mayor o las colecciones están alejadas será más eficaz utilizar el conteo. Si la tarea es de comunicación oral, no será posible utilizar ni la correspondencia término a término ni la correspondencia grupo a grupo ni la estimación puramente visual; sin embargo, sí se podrá resolver la tarea mediante el conteo o mediante la escritura aditivo-multiplicativa. Si la tarea es de comunicación escrita, el alumno puede emplear la estimación puramente visual (aunque es una técnica poco fiable), pero también la correspondencia término a término o la correspondencia grupo a grupo; sin embargo, será más económica la técnica del conteo y cuando las colecciones sean grandes también puede utilizar la escritura aditiva y la escritura aditivo-multiplicativa. Estas técnicas dejarán paso, finalmente, a la técnica de la escritura posicional en base 10, más eficaz y económica.
- La accesibilidad simultánea o no de las dos colecciones a la vez. Esta variable se puede considerar cuando la situación es de autocomunicación. Si ambas colecciones son accesibles a la vez, el alumno puede utilizar la correspondencia término a término o la correspondencia grupo a grupo. Si no son accesibles, dichas técnicas dejan de ser eficaces y se activa, así, el uso del conteo.

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

- El número de trayectos. Esta variable se puede considerar si ambas colecciones no son accesibles a la vez. Si es posible realizar los viajes que se desee para ir de una colección a la otra, el alumno puede utilizar la correspondencia término a término, la correspondencia grupo a grupo o el conteo. Si solo se puede llevar a cabo un número de viajes inferior al número de elementos de la colección, entonces podrá usar la correspondencia grupo a grupo o el conteo. Y si solo se puede realizar un viaje, entonces es más eficaz el conteo.

Consideramos que es importante responder de manera simultánea a las cuestiones (c) y (d), pues creemos que el único modo de identificar y justificar las variables didácticas es relacionarlas con las posibles técnicas o estrategias.

Finalmente, en la discusión de la última de las cuestiones (e) puede aparecer la pregunta de si los propios alumnos pueden validar una solución aunque solo dispongan de una única técnica de resolución.

Conclusiones y propuestas para un desarrollo futuro

Este trabajo propone un dispositivo de formación del profesorado que hemos denominado «recorrido de formación». Consiste esencialmente en un proceso de estudio generado por una cuestión «umbilical» para la formación de profesorado del nivel educativo en cuestión. Se parte del postulado de que toda formación debe organizarse en torno al estudio de un conjunto de cuestiones problemáticas (que constituyen el corazón del proceso de estudio) y de la consiguiente dialéctica entre las cuestiones y sus tentativas de respuesta.

Tomando como ejemplo una de dichas cuestiones, la que hace referencia al «contar» y al «enseñar a contar» en EI, hemos descrito un posible recorrido de formación que está guiado por algunas cuestiones generadas en un hipotético proceso de estudio. Durante este, hemos sugerido posibles elementos de respuesta a las cuestiones que iban apareciendo.

Es evidente que un programa de formación del profesorado requiere mucho más que unos cuantos itinerarios como el descrito. Es necesario que los diferentes itinerarios se relacionen entre sí, mostrar cuál es el universo (o mapa) de cuestiones que recubren y cuáles son las cuestiones cruciales para la profesión que todavía quedan fuera de dicho mapa. Para ello, serán imprescindibles los datos empíricos que nos suministrarán las sucesivas experimentaciones de los itinerarios que todavía están por elaborar.[11]

También hemos realizado una encuesta a los alumnos de 2º curso de Magisterio de EI de la Universidad Complutense que ayude a valorar la calidad de la formación. En resumen, el recorrido realizado ha sido valorado muy positivamente, aunque tenemos que optimizar el tiempo dedicado al análisis de situaciones didácticas y hacer más dinámico el trabajo en grupo.

En definitiva, la formación del maestro de EI revela una problemática docente muy rica y nada trivial que, de manera imperiosa, requiere no solo importantes esfuerzos de investigación en Didáctica de las Matemáticas, sino también que sea la propia *profesión* de maestro de Educación Infantil la que la tome en consideración y contribuya a hacerla evolucionar.

Para terminar, aunque en este trabajo no hemos abordado explícitamente la cuestión sobre qué papel deberían desempeñar las prácticas docentes en la citada formación, propugnamos que estas deben constituir un ámbito privilegiado de la formación, puesto que es en dicho ámbito en donde van a tomar cuerpo las cuestiones docentes y en donde el profesor en formación debe ensayar las respuestas tentativas. Nuestra propuesta pretende superar la concepción «aplicacionista» de las prácticas (según la cual los profesores aprenden en la clase de «teoría» y «aplican» sus conocimientos en las prácticas) y, en cambio, fundamentar toda la formación en la dialéctica entre las cuestiones (que surgen esencialmente en relación con la práctica docente) y los elementos de respuesta que los profesores han de poder construir con las herramientas que se les proporcionan (Gascón, 2001; Callejo, Llinares y Valls, 2007).

Referencias bibliográficas

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1991). *Aprendiendo a contar: Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos.* Madrid: CIDE.

(11) Este tipo de formación se está experimentado parcialmente en España desde el curso 2004-05 en la Universidad Complutense de Madrid y, de forma más reciente, en la Universidad de Jaén (Ruiz y García, 2008) por lo que se refiere a la Enseñanza Infantil y Primaria. El equipo del Instituto Universitario de Formación de Maestros de Marsella, dirigido por Yves Chevallard, lleva implementándolo desde el curso 2002-03 y ha dado lugar a un extenso trabajo de investigación para el caso de la formación de profesores de Secundaria (Cirade, 2006).

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

Berthelot, R. & Salin M. H. (1992). *Représentation de l'espace chez l'enfant et enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Didactique des mathématiques*. Tesis doctoral, Université de Bordeaux i, Burdeos, Francia.

Blanco, L. (2002). Educación matemática y formación inicial del profesorado de Primaria, Secundaria y Bachillerato. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 43, 173-179.

Blanco, L. J. y Contreras, L. C. (Coords.). (2002). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas. Una mirada a la práctica docente.* Cáceres: Universidad de Extremadura.

Bosch, M. y Gascón, J. (2005). El tractament integrat de la formació del professorat de matemàtiques. *Societat Catalana de Matemàtiques. Noticies*, 21, 12-19.

Briand, J. (1993). *L'enumération dans le mesurage des collections: un dysfonctionnement dans la transposition didactique.* Tesis doctoral, Université de Bordeaux i, Burdeos, Francia.

Briand, J. & Chevalier, M. C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* París: Hatier.

Briand, J., Loubet, M. & Salin, M. H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle* [cd-rom]. París: Hatier.

Callejo, M. L., Llinares, S. y Valls, J. (2007). *El uso de videoclips para una práctica reflexiva*. Comunicación en las xiii Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas-jaem, Granada, julio.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1988). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis.

Chamorro, M. C., Belmonte, J. M., Ruiz Higueras, L. et ál. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil.* Madrid: Pearson Educación.

Chevallard, Y. (2004). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire.* 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22-27 de agosto.

— (2007): *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ice-Horsori.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en iufm. Les mathématiques comme problème professionnel.* Tesis doctoral, Université Aix-Marseille i, Marsella, Francia.

Copirelem (1997-2002). *Les Cahiers du formateur*. Tomos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. arpeme. irem de París vii, París, Francia.

Dubois, C., Fenichel, M. & Pauvert, M. (1993). *Se former pour enseigner les mathématiques. (2. Maternelle, grandeur et mesure).* París: Armand Colin.

Ermel (1990). *Apprentissages numériques. (Grande section de maternnelle).* París: Hatier.

Fernández, C. (2004*a*). *Análisis didáctico de la secuencia numérica.* Málaga: Dykinson.

— (2004*b*): *Pensamiento numérico y su didáctica.* Málaga: Dykinson.

Fernández Enguita, M. (2001). A la busca de un modelo profesional para la docencia: ¿liberal, burocrático o democrático? *Revista Iberoamericana de Educación*, 25.

Fuson, K., Richards, J. & Briars, D. (1982). The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence. En C. Braineard (Ed.), *Children's Logical and Mathematical Cognition: Progress in Cognitive Development*. Nueva York: Springer Verlag.

Gairín-Calvo, S. (1988). *Les nombres au CP. Avec ou sans logiciel*. Burdeos: irem de Burdeos. Universidad de Burdeos i.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.* Tesis doctoral, México.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Relime,* 4 (2) 129-159.

Gascón, J. y Bosch, M. (2007). La miseria del "generalismo pedagógico" ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Gelman, R. (1983). Les bébés et le calcul. *La Recherche*. 149 (83), 1382-1389.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo.* Madrid. Síntesis.

Llinares, S. (1999). La investigación sobre el profesor de matemáticas. Aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula. Revista de enseñanza e investigación educativa*, vol. 10, 153-179.

Martin, F. (2003*a*). *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*. *Livre du maître*. Burdeos: crdp d'Aquitaine.

— (2003*b*): *Apprentissages mathématiques: jeux en maternelle*. *Fichier d'illustrations.* Burdeos: crdp d'Aquitaine.

Real decreto 1630/2006 de 29 de diciembre sobre las enseñanzas mínimas del 2º ciclo de Educación Infantil. Boe n.º 4, 474-482.

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009

Orus, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effects d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire.* Tesis doctoral, Universidad de Burdeos, Burdeos, Francia.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de currículo y formación del profesorado*, 8 (1), 1-15. Universidad de Granada.

Ruiz, L. y García, F. J. (2008). *Didáctica de las matemáticas y formación de maestros. Respuestas y desafíos desde la tad*. En Segundo Congreso Internacional de la tad. Uzés, Francia (en prensa).

Pierrard, A. (2002). *Faire des mathématiques à l'école maternelle*. Grenoble: crdp de l'Académie de Grenoble.

Robert, A. y Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media: ¿Por qué y cómo? *Educación Matemática,* 17, (2).

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la escuela elemental. *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*. Madrid: Instituto Superior de Formación del Profesorado, Ministerio de Educación y Ciencia.

Sánchez, V. y García, M. (2004). Formadores de profesores de Matemáticas. Una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de Educación*, 333, 481-493.

Valentin, D. (2005*a*). *Découvrir le monde avec les mathématiques: situations pour la grande section de maternelle.* París: Hatier.

— (2005*b*): *Découvrir le monde avec les mathématiques, grande section de maternelle: matériel pour la classe.* París: Hatier.

Fuentes electrónicas

Chevallard, Y. (2001). *Aspectos problemáticos de la formación docente*. xvi Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca. Recuperado el 06 de febrero de 2009, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Osca.pdf.

— (2004*b*): *Vers une didactique de la codisciplinariété. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire.* Recuperado el 06 de febrero de 2009, de http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/form_formateur/documents/YC0906.pdf.

Puig, L. (2005, 11 de julio). Enseñar a enseñar las matemáticas. *El País Digital.* Recuperado el 08 de julio de 2009, de http://divulgamat2.ehu.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=4958.

Sierra, T.A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid. Recuperado el 06 de febrero de 2009, de http://www.ucem.es/BUCM/tesis/edu/ucm-t%2029075.pdf.

Dirección de contacto: Tomás Ángel Sierra Delgado. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. C/ Rector Royo Villanova, s/n, 28040, Madrid, España. E-mail: tomass@edu.ucm.es.

Fecha de entrada: 02-03-2009 Fecha de aceptación: 15-12-2009