Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos

Jerónimo Juidías Barroso
Universidad de Huelva

Isabel R. Rodríguez Ortiz
Departamento de Psicología
Evolutiva y de la Educación
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Sevilla

Resumen

El artículo se inicia repasando el concepto «resolución de problema» y los distintos modelos de Resolución de Problemas Matemáticos (RPM). A continuación se analizan los distintos factores que pueden intervenir en la RPM dividiéndolos en aquéllos que corresponden al problema matemático, los relativos al alumno o alumna que resuelve el problema y, finalmente, al contexto del aprendizaje de la RPM. Posteriormente, se describen las dificultades a las que puede enfrentarse el alumnado que resuelve un problema matemático. Una vez descritas las dificultades de aprendizaje, el resto del artículo aborda cómo intervenir sobre ellas.

Palabras clave: matemáticas, problemas, ejercicios, conocimiento.

Abstract: *Difficulty in learning and psycho-pedagogical involvement when solving mathematical problems*

This article starts by reviewing the concept of «problem solving» and the different patterns of Mathematical Problem Solving (MPS). Then, the different factors that may intervene in MPS are both analysed and classified into those that belong to the mathematical problem, those that refer to the actual student solving the problem and, finally, those related to the MPS learning

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

context. Subsequently, the difficulties that students solving a mathematical problem may face are described. Once the learning difficulties have been portrayed, the article deals with how to address them.

Key words: Maths, problems, exercises, knowledge.

Concepto

Concepto de resolución de problema

El amplio consenso existente en torno a la importancia de la resolución de problemas en el aula matemática contrasta vivamente con la ausencia de acuerdo en relación con lo que ello significa. La resolución de problemas en general ha recibido distintas definiciones en función de la teoría psicológica que la ha abordado. Así, los teóricos de la *Gestalt* consideraron que el núcleo de la resolución de problemas consistía en la comprensión del problema como un todo. Su compromiso con la noción de insight les llevó a considerar la resolución de problemas como una actividad que requería la integración, de forma novedosa, de las respuestas anteriormente aprendidas.

Para los teóricos del *conductismo* la clave residía en las conexiones entre las acciones ejecutadas por el sujeto que resuelve el problema y las condiciones bajo las cuales se manifiestan esas acciones.

El análisis de la *psicología del procesamiento de la información* integra, en cierta medida, algunas de las aportaciones de los enfoques anteriores pero pone especial énfasis en el estudio del conocimiento necesario para que la resolución de problemas tenga lugar. En el ámbito de las matemáticas, este paradigma inspira definiciones como la de Cawley y Miller (1986), quienes definen la resolución de problemas matemáticos (RPM) como la interpretación de la información y el análisis de los datos para alcanzar una respuesta aceptable o con objeto de sentar las bases para una o más alternativas posibles.

En esta misma línea se sitúa la definición de Orton (1990, cit. en Nortes, 1992), quien concibe la resolución de problemas «como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del procedimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar soluciones a una situación nueva».

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Modelos de resolución de problema

El modelo más clásico, pero aún vigente, de las fases por las que atraviesa la RPM es el descrito por Polya (1945). Para él la RPM es un proceso que consta de cuatro fases:

- Comprensión del problema
- Planificación
- Ejecución del plan
- Supervisión

Este modelo ha inspirado la gran mayoría de los modelos de RPM que se han elaborado posteriormente. En la Tabla I puede observarse que, pese a las diferencias terminológicas y de precisión del análisis, los modelos de RPM que han seguido al de Polya guardan estrechos vínculos con él y representan una forma de poder identificar diversos heurísticos que han servido para mejorar la resolución de problemas de los alumnos.

TABLA I. Modelos de resolución de problemas matemáticos

	1ª fase	2ª fase	3ª fase	4ª fase
Polya (1945)	Comprensión del problema	Planificación	Ejecución del plan	Supervisión
Dunlap y McKnight (1980)	-Percepción de símbolos escritos -Decodificación de símbolos escritos -Formulación del significado general de las oraciones -Traducción del mensaje general en un mensaje matemático	-Determinación de lo que hay que buscar -Examen de los datos relevantes -Análisis de las relaciones entre los datos -Elección de las operaciones matemáticas -Estimación de las respuestas	- Formulación de los datos mediante la notación matemática - Ejecución de los cálculos matemáticos -Decodificación de los resultados para que tengan sentido técnico -Formulación de los resultados técnicos como respuestas a la cuestiones iniciales	-Verificación de las respuestas
Gagné (1983)	Traducción verbal de las situaciones descritas al lenguaje matemático		Fase central de cálculo	Validación de la solución
Montague (1988)	-Lectura del problema -Paráfrasis -Visualización -Enunciado del problema	-Hipótesis -Estimación	-Cálculo	- Verificación
Schoenfeld (1979)	-Análisis -Exploración	-Diseño	-Implementación	-Verificación
Uprichard, Phillips & Soriano (1984)	-Lectura -Análisis	-Estimación -Traducción	-Cálculo	-Verificación
Mayer (1991)	- Representación -Traducción -Integración	-Planificación	-Monitorización -Ejecución	-Verificación
Garofalo y Lester (1985)	- Orientación	-Organización	-Ejecución	-Verificación
Glass y Holyak (1986)	- Comprensión o representación del problema	-Planificación	-Ejecución del plan	-Evaluación de los resultados
Brandsford y Stein (1984)	-Identificación -Definición	-Exploración	-Actuación	-Observación -Aprendizaje

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

En general, la *1ª fase* de la resolución hace referencia a la *identificación y definición del problema.* La identificación supone el reconocimiento de la existencia de un problema y de la necesidad de resolverlo. La mayoría de los problemas matemáticos que tienen que resolver los alumnos no exigen ningún esfuerzo de este tipo, puesto que el problema se les presenta ya como tal.

La definición del problema consiste en la decodificación de los símbolos escritos y en la conversión del enunciado matemático en una representación mental. En dicha representación intervienen, a su vez, dos subprocesos (Mayer, 1991):

- la traducción del problema o paso de cada oración a una representación mental;
- la integración o combinación de la información disponible en un esquema coherente.

La definición adecuada de un problema matemático va a depender, por un lado, de la disponibilidad de una amplia gama de estrategias que podemos aplicar en diversos contextos y, por otro, de la capacidad de reconocer que la estructura del problema que tenemos que resolver es similar a la de otros que hemos resuelto previamente (Alonso, 1991); para ello será necesario que podamos distinguir los datos relevantes de aquéllos que no lo son y, que seamos capaces de observar que los datos relevantes de un determinado problema coinciden con los de otro que hemos resuelto anteriormente.

En definitiva, en esta fase de la resolución está implicada no sólo la capacidad de análisis de la información que aparece en el enunciado, sino también la «autoevaluación» que la persona hace de su conocimiento de la tarea, del nivel de dificultad y de las posibilidades de éxito (Garofalo y Lester, 1985).

La *2ª fase* consiste en la *planificación de la solución.* Se trata ahora de diseñar el esquema de actuación a seguir, lo que supone identificar las metas y las «submetas», examinar las diversas estrategias generales que podemos aplicar y elegir las acciones que se llevarán a cabo.

En la *3ª fase* se procede a la *ejecución del plan* previamente diseñado. Ello supone realizar las acciones particulares, regular la conducta para que se ajuste al plan prefijado y tomar decisiones con respecto a aspectos tales como la exactitud versus velocidad, etc.

La *4ª fase* se refiere a la *verificación,* es decir, la evaluación de las decisiones tomadas (análisis de la información, ejecución de los cálculos, etc.) y de los resultados del plan ejecutado (exactitud de la respuesta, correspondencia con el enunciado que la originó, etc.).

La fortaleza de esta descripción por fases que acabamos de exponer reside en su utilidad para facilitar el diagnóstico y la intervención sobre las dificultades en la RPM.

Revista de Educación, 342. Enero-abril 2007, pp. 257-286
Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Concepto de «verdadero problema»

Al igual que el concepto de «resolución de problemas», la definición de «problema matemático» ha sido objeto de muchos intentos de conceptuación. Así, se ha definido como:

- «algo que precisa ser realizado o que requiere la realización de algo» (Webster, 1979, cit. en Schoenfeld, 1992);
- «una cuestión que causa perplejidad o que presenta dificultad» (Webster, 1979, cit. en Schoenfeld, 1992);
- «una situación que exige la aplicación de un plan de acción con objeto de transformarla» (McDermott, 1978, cit. en Puente, 1994);
- «una tarea que plantea al individuo la necesidad de resolverla y ante la cual no tiene un procedimiento fácilmente accesible para hallar la solución» (Lester, 1983, cit. en Pérez, 1987);
- al igual que esta última definición, Schoenfeld (1989) destaca que para que una actividad de aprendizaje pueda ser definida como un verdadero problema es necesario que:
  - el alumno se interese e implique en la obtención de la solución;
  - el alumno no tenga medios matemáticos de fácil acceso para alcanzar la solución.

Es decir, un problema exige mucho más que la aplicación rutinaria de algoritmos o fórmulas. Esta es una de las características que permiten distinguir un problema de un mero ejercicio de aplicación (véase Tabla II).

TABLA II. Diferencias entre un problema y un ejercicio de aplicación

Problema matemático	Ejercicio de aplicación
-El individuo se ve expuesto ante una dificultad para la que no tiene un remedio inmediato. -El individuo se implica en su solución. -Requiere utilizar de modo estratégico los procedimientos previamente conocidos. Las técnicas automatizadas pueden ser necesarias, pero no son suficientes para llegar a la solución. -Supone al individuo una demanda cognitiva de alto nivel. -La determinación de la información relevante es una pieza clave en la resolución del problema	-Puede resolverse mediante la aplicación directa de un procedimiento previamente adquirido. -La aplicación rutinaria del algoritmo no exige ningún interés especial en el individuo que resuelve la tarea. -Requiere la mera aplicación de técnicas automatizadas, ya que éstas son necesarias y suficientes para llegar a la solución. -Supone al individuo una demanda cognitiva de bajo nivel. -El individuo no precisa discernir la información relevante de la irrelevante porque toda la información que aparece en el enunciado es necesaria para la solución.

El énfasis, puesto hasta la fecha, tanto en el aula como en los libros de textos, sobre los ejercicios de aplicación para la ejercitación y la valoración de los conocimientos y destrezas matemáticos puede haber contribuido a la desvalorización de las Matemáticas como disciplina de probada utilidad, a la desmotivación de los alumnos e, incluso, al fracaso de una buena parte de éstos.

Factores que intervienen en la RPM

Estos factores pueden dividirse según el ámbito al que pertenecen, es decir, existen factores relativos al:

- problema matemático a resolver,
- alumno que resuelve el problema y
- contexto en que el alumno, unas veces, aprende a resolver y, otras, resuelve el problema matemático.

En la actualidad se carece de un marco teórico capaz de explicar cómo encajan entre sí todos estos factores.

Factores relativos al problema matemático

El primer grupo de estos factores se refiere al *lenguaje en el que se expresa el enunciado* del problema. Este lenguaje presenta una serie de características que pueden oscurecer la comprensión del enunciado matemático:

- En primer lugar, mantiene, al mismo tiempo, semejanzas y diferencias con el lenguaje ordinario. En el lenguaje matemático se utilizan palabras y símbolos que también se emplean en el lenguaje ordinario pero con un significado totalmente distinto (por ejemplo: raíz, índice, etc.) (Macnab y Cummine, 1992). A su vez el lenguaje matemático se distingue del ordinario en cuanto a la exigencia de precisión a la hora de expresar los conceptos y en cuanto a la ausencia de expresiones personales y juicios de valor.

Revista de Educación, 342. Enero-abril 2007, pp. 257-286
Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

- El empleo de variables y la utilización conjunta de la notación alfabética y la notación numérica añaden mayor dificultad a los enunciados de los problemas (Pérez, 1994).
- El orden y la forma de presentación de los datos puede dificultar la traducción del enunciado a una representación mental (Pérez, 1994). En concreto, el uso de ciertas expresiones (paréntesis, fracciones, índices, etc.) obligan a leer el enunciado en todas las direcciones (Callejo, 1987), no sólo de izquierda a derecha.
- La presencia de datos irrelevantes para la solución del problema también puede oscurecer su representación mental (Pérez, 1994).
- Según algunos estudios (Tomás, 1993) el número de palabras que contiene el enunciado influye significativamente en la dificultad de la resolución, si bien es cierto que esta influencia es mayor en los primeros años de la escolaridad que en los últimos. Lo mismo cabe decir del número de operaciones aritméticas que requiere el problema y del tamaño de los números que se emplean (al aumentar el número de operaciones y el tamaño de los números disminuyen las probabilidades de éxito) (Mialaret, 1984).

El segundo gran bloque de factores se refiere al *tipo de problema* que hay que resolver. No todos los problemas suponen el mismo grado de dificultad a la hora de resolverlos, de ahí que se hayan realizado considerables esfuerzos a la hora de categorizar la variedad de los problemas empleando diversos criterios.

Luria y Tsvetkova (1981) distinguen ocho grupos de problemas en función de la complejidad de los algoritmos implicados en su resolución:

- *Problemas simples:* son del tipo a+b=x; a-b=x. Se pueden resolver con una sola operación. Los datos del enunciado determinan unívocamente el algoritmo de la resolución. Ejemplo: Juan tiene 8 canicas y Carlos 4. ¿Cuántas tienen entre los dos?
- *Problemas simples invertidos:* son del tipo a-x=b; x-a=b. También se resuelven con una operación. Los datos se dan en un orden distinto al que deben seguir los actos. Esto hace que surja un conflicto en el sujeto cuando intenta resolver el problema, ya que debe vencer la tendencia a resolverlo de manera rectilínea y la inercia de las huellas dejadas por la lectura de los datos del problema. Ejemplo: María tenía 8 caramelos. Da algunos. Le quedan 2. ¿Cuántos ha dado?
- *Problemas compuestos del tipo a+(a+b)=x; a+(a-b)=x; a+ab=x.* No se pueden resolver con una sola operación. Los datos del problema no determinan por sí mismos la resolución. Ejemplo: Pedro tiene 7 manzanas y Ana 2 más. ¿Cuántas tienen en total?

- *Problemas compuestos del tipo a+n=x; x+m=z; a+(a+b)+(a+b)-c=x.* El algoritmo de resolución se subdivide en un número de operaciones en las que cada una surge de la anterior. Esto obliga a realizar las operaciones en el plano «mnésico» ya que exige que se retenga el resultado de la operación anterior para usarlo en la siguiente. Ejemplo: Un joven tiene 15 años, su padre 25 años más, su madre 5 años menos que el padre. ¿Cuántos años tienen entre los 3?
- *Problemas del tipo a+b=x;x.m=y;y-n=z.* Una de las partes es desconocida y se tiene que obtener a través de operaciones intermediarias no formuladas en los datos del problema. La respuesta final se obtiene tras una serie de operaciones auxiliares, una de las cuales presenta un proceso inverso. Ejemplo: Un niño tiene 5 años. Dentro de 15 años su padre será 3 veces mayor que él. ¿Cuál es la edad actual del padre?
- *Problemas del tipo x+y=a; n.x+y=b; x+y+z=a; x+y=b; y+z=c.* La resolución del problema exige la confrontación de un sistema de ecuaciones, ya que todas las magnitudes del enunciado son incógnitas. Ejemplo: Un bolígrafo y un cuaderno cuestan 1,65 euros, 2 bolígrafos y 1 cuaderno cuestan 2,40 euros. ¿Cuánto cuestan 1 bolígrafo y cuánto 1 cuaderno?
- *Problemas de conflicto.* Plantean, además, dificultades de carácter psicológico. El algoritmo de la resolución entra en conflicto con un estereotipo sólidamente adquirido y para solucionar el problema hay que vencer el estereotipo. La palabra clave predispone a un algoritmo, pero el significado global del enunciado implica otro algoritmo distinto. Este tipo de problemas también se denominan inconsistentes. Ejemplo: Un padre tiene 49 años, tiene 20 años más que su hijo. ¿Cuántos años tienen entre los dos?
- *Problemas del tipo x+y=A, con x=2y;x+y=A, con x=y-2.* Es imposible resolver estos problemas sin recurrir a un procedimiento especial auxiliar que permite superar la tendencia a realizar operaciones directas. Ejemplo: En 2 estanterías hay 18 libros. En una hay 2 veces más que en la otra. ¿Cuántos libros hay en cada estantería?

Por su parte, Riley, Greeno y Heller (1983, cit. en Mevarech, 1995) distinguen tres categorías en función de las relaciones que se establecen entre los datos que se presentan en el enunciado:

- *Problemas de cambio:* implican al menos un cambio temporal, de aumento o decremento, en las cantidades iniciales para llegar a un estado final. Ejemplo: María tiene 3 manzanas, Pepe le da una manzana más, ¿cuántas manzanas tiene ahora María?

Revista de Educación, 342. Enero-abril 2007, pp. 257-286
Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

- *Problemas de combinación:* implican una situación en la que se combinan dos conjuntos de elementos que no cambian. Ejemplo: María tiene 3 manzanas, Pepe tiene 1 manzana, ¿cuántas manzanas tienen entre los dos?
- *Problemas de comparación:* implican dos conjuntos de elementos que no cambian, relacionados entre sí por expresiones del tipo «más que», «menos que». Ejemplo: María tiene 3 manzanas, Pepe tiene 1 manzana, ¿cuántas manzanas más que Pepe tiene María?

Se ha demostrado que los problemas de combinación suponen una menor dificultad que los otros dos tipos y que los problemas de comparación son los más complejos (Mayer, 1991). Por otra parte, se ha observado que los problemas en los que hay que averiguar el resultado de una transformación (a+b=?) son más fáciles que los problemas en los hay que averiguar las condiciones iniciales para llegar a un resultado determinado (?+b=c) (Mayer, 1991).

Tomás (1990) clasifica los problemas en función de la forma que adopta el enunciado. Así, considera:

- *Problemas de presentación y pregunta:* cuando el enunciado consiste en la presentación de una situación y al final se plantea la pregunta. Ejemplo: María tiene 3 manzanas, Pepe le da una manzana más, ¿cuántas manzanas tiene ahora María?
- *Problemas de pregunta y explicación a la vez:* cuando el enunciado es en sí mismo la pregunta y el planteamiento de la situación problemática a la vez. Ejemplo: ¿Cuántas canicas tendrán Juan y Carlos juntos si Juan tiene 8 canicas y Carlos 4?
- *Problemas de pregunta indirecta:* cuando la pregunta no es explícita. Ejemplo: En una estantería caben 9 libros, tengo 3 estanterías y me gustaría saber si me van a caber en ellas todos los libros que tengo. Tengo 25 libros.
- *Problemas de explicación y diversas preguntas:* cuando el problema plantea una situación y exige varias respuestas. Ejemplo: Un bolígrafo y un cuaderno cuestan 1,65 euros, 2 bolígrafos y 1 cuaderno cuestan 2,40 euros. ¿Cuánto cuestan 1 bolígrafo y cuánto 1 cuaderno? ¿Con 10 euros tengo suficiente dinero para comprar 5 bolígrafos y 7 cuadernos?
- *Problemas de preguntas internas no explícitas:* cuando el problema plantea preguntas explícitas pero hay que deducir información a partir de los datos del enunciado. Ejemplo: Tardo 35 minutos en ir de mi casa al colegio y otros tantos en volver. Si voy al colegio por la mañana y por la tarde, ¿cuántas horas al día dedico a este desplazamiento?

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Según esta autora, los tres primeros tipos de problemas plantean una dificultad similar y los enunciados que formulan varias preguntas (ya sean directas o indirectas) son los que resultan más difíciles.

Factores relativos al alumno que resuelve el problema

Basaremos nuestra exposición en las cuatro dimensiones clásicas consideradas por Schoenfeld (1992): conocimientos de base, heurísticos, «metacognición» y componentes afectivos.

Conocimiento de base

Según Schoenfeld (1992), dentro de esta dimensión se engloban tanto los conocimientos de base que posee el individuo, como el acceso que tiene a ellos y cómo los utiliza. De esta manera, los expertos en la RPM no sólo se caracterizan por la cantidad de conocimientos que poseen, sino también por cómo organizan su almacenamiento, lo que les permite tener un fácil acceso a ellos cuando la tarea lo requiere.

En los conocimientos de base se incluyen los conocimientos formales e informales sobre hechos, definiciones y procedimientos matemáticos. Todos ellos juegan un papel crucial en la fase de representación del problema, pero no sólo intervienen en esta fase. Esto, al menos, es lo que defiende Mayer (1991), quien asocia distintos tipos de conocimientos con cada una de las fases de la RPM. En concreto, en la fase de identificación y definición del problema se encontrarían implicados:

- el *conocimiento lingüístico* o conocimiento del idioma en que está expresado el enunciado;
- el *conocimiento semántico* o conocimiento sobre los hechos del mundo representados en las palabras del enunciado y;
- el *conocimiento esquemático* o conocimiento del tipo de problema al que pertenece el enunciado. Este conocimiento no sólo interviene en la comprensión del problema, sino que facilita su solución al proporcionar pistas para la actuación ante el problema (Zorroza y Sánchez-Cánovas, 1995).

En la fase de planificación de la solución intervendría el *conocimiento estratégico* o conocimiento de las técnicas generales de resolución de problemas, también denominadas heurísticos, que analizaremos a continuación.

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

En la fase de ejecución del plan participaría el *conocimiento «procedimental»* o conocimiento sobre cómo ejecutar una secuencia de operaciones, como por ejemplo, sumar quebrados.

Montague (1992) añade una categoría adicional, el *conocimiento condicional,* que se refiere a aquel conocimiento que permite al alumno seleccionar y aplicar las estrategias apropiadas y ajustar su conducta a las demandas cambiantes de la tarea. Sería un conocimiento estratégico, dependiente de la tarea y del contexto en que ésta se realiza.

Heurísticos

Los heurísticos son estrategias generales de resolución de problemas, carentes de contenido matemático específico, no aseguran llegar a la solución pero aumentan las posibilidades de alcanzarla (De Corte, 1993). Ejemplos de heurísticos son el trabajo hacia atrás, partir de una posible solución y determinar sus propiedades, la exploración de los casos extremos, la analogía con otros problemas resueltos previamente, la descomposición del problema en otros más sencillos, la generalización de la solución obtenida, etc.

Puig-Cerdán (1988, cit. en Nortes, 1992) defiende que apropiarse de un heurístico implica:

- saber cuándo hay que usarlo
- saber cómo se relaciona con otros heurísticos
- saber todas sus variantes y sus aplicaciones
- saber qué puede esperarse del heurístico

Los heurísticos recibieron una atención importante tras la publicación del libro de Polya, How to solve it, en 1945 y, en especial, en la década de los años ochenta del siglo XX. Posteriormente, se les ha criticado por considerar que la caracterización que hizo Polya de los heurísticos era más descriptiva que «prescriptiva», es decir, el listado de Polya servía para identificar las estrategias cuando éstas eran utilizadas, pero no ofrecía orientaciones para que, aquéllos que no estaban familiarizados con la técnica, la emplearan con éxito (Schoenfeld, 1992). Posteriormente, y gracias a trabajos como los desarrollados por Schoenfeld (véase el epígrafe «Intervención psicoeducativa sobre las dificultades en la resolución de problemas matemáticos» dentro de este mismo artículo), se ha podido demostrar que los heurísticos son «entrenables».

«Metacognición»

Dentro de este término se incluyen el «metaconocimiento» (o conocimiento declarativo acerca de los propios procesos cognitivos y acerca de la demanda de la tarea) y los procesos de autorregulación que actúan sobre los propios procesos cognitivos (Nickerson, Perkins y Smith, 1990).

El «metaconocimiento» referido a la RPM hace referencia a la autoevaluación que hace el individuo de sus propias capacidades y limitaciones respecto a la RPM. El «metaconocimiento» relativo a la tarea matemática incluye las creencias acerca del objetivo de la RPM y acerca de las relaciones existentes entre las características del enunciado del problema y su grado de dificultad (Garofalo, 1989).

Los *procesos de autorregulación de la cognición* aplicados a la RPM serían los responsables de las distintas decisiones que toma el alumno en el transcurso de la resolución y que tienen que ver con la planificación del proceso, la selección de las estrategias adecuadas, la monitorización de la aplicación de las estrategias, la evaluación de los resultados y del proceso seguido y, si es necesario, la corrección de los errores habidos durante el proceso (Schoenfeld, 1992).

A partir de los estudios realizados por diversos autores, Costa (1984) extrae como conclusión que existe una clara evidencia de que el adecuado desarrollo de las habilidades «metacognitivas» se relaciona con la persistencia en la resolución de problemas, el pensamiento crítico y flexible y el ejercicio consciente de las habilidades cognitivas.

Componentes afectivos

El dominio de los afectos carece de un fuerte basamento teórico y sufre de una considerable indefinición terminológica. Por otra parte, las relaciones existentes entre cognición y afectividad no han logrado aclararse suficientemente. Mientras se progresa en el hallazgo de un modelo teórico consistente, aceptaremos la sugerencia de Simon (1982, cit. en McLeod, 1992) de emplear el término «afecto» de forma genérica y las denominaciones «creencias», «actitudes» y «emociones» para la descripción específica de los componentes del afecto.

Mandler (1989, cit. en McLeod, 1992) considera que el contexto juega un importante papel en la formación y mantenimiento de las creencias, emociones y actitudes. Dicho contexto se refiere tanto al «microcontexto» que supone la situación de aprendizaje, como al «macrocontexto» conformado por las diferentes influencias sociales.

Creencias

Las creencias relativas a la RPM hacen referencia al conocimiento subjetivo que tiene el alumno sobre la naturaleza de las Matemáticas y de la RPM, sobre sí mismo, sobre la enseñanza de las Matemáticas y sobre el contexto en el que transcurre su enseñanza (McLeod, 1992). Gran parte de estas creencias entrarían dentro de lo que hemos deno-

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

minado anteriormente «metaconocimiento», especialmente las creencias relativas a sí mismo como «solucionador de problemas matemáticos» y a la naturaleza de la RPM.

Las creencias pueden influir tanto en la motivación con la que los alumnos se enfrentan a las Matemáticas (McLeod, 1992) como en el rendimiento matemático (Garofalo, 1989) e incluso en la elección de las estrategias de resolución que se aplican (Mayer, 1991).

Actitudes

Quiles (1993) define las actitudes como predisposiciones aprendidas que nos llevan a actuar de una forma determinada ante personas y situaciones.

La actitud hacia la RPM hace referencia a los sentimientos positivos o negativos que despierta en el alumnado dicha resolución y que se conforman en la medida en que el alumno se encuentra con la misma situación de RPM repetidamente (McLeod, 1992).

La importancia de la actitud radica en la influencia que puede ejercer sobre la conducta del alumno a la hora de resolver un problema matemático. Sin embargo, muchos de los estudios que se han ocupado de hallar la correlación entre actitudes y conductas matemáticas han encontrado correlaciones significativas pero relativamente bajas entre ellas (Quiles, 1993).

Las actitudes de los profesores hacia las Matemáticas también se han convertido en objeto de estudio, en especial, por su relación con las actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos. Esta relación parece demostrada en una serie de estudios (por ejemplo, Aiken, 1970, cit. en Ernest, 1989; Banks, 1964, cit. en Quiles, 1993). También se ha puesto de manifiesto que las actitudes del profesorado influyen en el rendimiento matemático del alumnado (Begle, 1979, Shofield, 1981, Bishop & Nickson, 1983, cits. en Ernest, 1989).

Emociones

Este es el componente afectivo que menos atención ha recibido por parte de los investigadores; en esto ha podido influir la dificultad que supone su evaluación debido a la inestabilidad que caracteriza a las emociones y debido a lo inaccesible que resulta su estudio a través de cuestionarios (McLeod, 1992).

Las emociones se han definido como reacciones subjetivas ante situaciones determinadas (Lester, Garofalo y Kroll, 1989). En el caso de las Matemáticas, las emociones se refieren a las reacciones que tienen los individuos cuando se enfrentan ante una tarea matemática como puede ser la RPM.

Wagner, Rachlin y Jensen (cit. en McLeod, 1992) observan cómo los alumnos que se bloquean ante un problema de álgebra se sienten, a veces, frustrados y buscan tentativamente la respuesta que les sacará del bloqueo, sin importarles si esa respuesta que obtienen es lógica o no.

McLeod (1992) encuentra que los alumnos experimentan emociones positivas y negativas ante los bloqueos que suceden en la RPM, pero dichas emociones son más evidentes cuando la situación de RPM es nueva.

En otro estudio McLeod, Metzger y Craviotto, (1989, cit. en McLeod, 1992) comparan las reacciones emocionales de expertos y noveles ante la RPM y concluyen que, mientras que no se encuentran diferencias respecto a las emociones positivas y negativas que experimentan ambos grupos, sí que se encuentran con relación al control que unos y otros ejercen sobre esas emociones.

Factores relativos al contexto en que el alumno aprende y resuelve el problema matemático

La adquisición y utilización de los conceptos y procedimientos matemáticos en la RPM están muy influidas por el contexto sociocultural donde las Matemáticas se enseñan y aprenden. De hecho, la investigación «transcultural» ha puesto de manifiesto cómo algunas personas que fracasan en la resolución de problemas en el ámbito académico son capaces de resolverlos correctamente cuando esos problemas se le plantean en el transcurso de su vida cotidiana (Saxe, 1990, Rogoff y Lave, 1984, cits. en Gómez, 1991).

Estos hallazgos han propiciado una reformulación del proceso de enseñanza-aprendizaje que, en el ámbito de la RPM, se ha traducido en lo siguiente:

- Se considera que las personas se comportan de manera diferente según perciban la meta de la situación en la que se hallan (Edwards y Mercer, 1987, 1989). Un ejemplo podemos observarlo en el estudio que llevan a cabo Lester, Garofalo y Kroll (1989) con alumnos de séptimo curso. En él solicitan a los alumnos que escriban problemas que les parezcan interesantes. Una vez recogidos todos los problemas, piden a los niños que los clasifiquen de 1 a 5, otorgando el 1 a los muy aburridos y el 5 a los muy interesantes. A continuación los niños tienen que elegir uno de esos problemas para resolverlo. Los autores encuentran que la inmensa mayoría de los niños elige un problema clasificado como muy aburrido y esto se da tanto en los niños que son buenos resolviendo problemas como en aqué-

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

llos que tienen dificultades. Cuando se les pregunta la razón de tal elección la respuesta más común es que quieren asegurarse de poderlo resolver correctamente. Los niños prefieren obtener un buen resultado a evitar los problemas que les resultan aburridos. Al fin y al cabo los niños perciben la escuela como un lugar donde se acude a aprender y no como un lugar de ocio y disfrute.

- El conocimiento y las destrezas que se adquieren en un contexto no se generalizan ni fácil ni espontáneamente a otros contextos (Gómez, 1991). Esto afecta especialmente a la metodología didáctica que debe emplearse para que tenga lugar la generalización de los conocimientos matemáticos que se enseñan en la escuela a los problemas que los alumnos afrontan fuera de ella. También influye sobre la evaluación de los aprendizajes matemáticos pues obliga a ampliar el objeto de la evaluación para poder dar cuenta de los conocimientos y procedimientos matemáticos que el niño adquiere en contextos informales.
- El conocimiento es fruto de la interacción del alumno con el contexto físico y social culturalmente organizado (Gómez, 1991). El contexto escolar se diferencia de los contextos extraescolares con los que normalmente interactúa el alumno tanto en la meta que persigue como en las formas discursivas que en él se emplean. En concreto, en las clases de Matemáticas la forma discursiva imperante es aquélla que prima la descontextualización del lenguaje. Por otra parte, mientras que fuera de la escuela el alumno puede percibirse como controlador de sus propios problemas, de manera que es el propio alumno quien decide etiquetar una situación como problemática y quien selecciona libremente las estrategias para resolverla, en el contexto escolar los problemas le vienen asignados y las estrategias le son más o menos impuestas (Gómez-Granell y Fraile, 1993; Gómez-Granell, 1994).

Dificultades en la resolución de problemas matemáticos

Para la exposición de las dificultades en la RPM nos guiaremos por las cuatro dimensiones utilizadas en el apartado anterior en relación con los factores intervinientes relativos al alumno. Es decir, vamos a exponer ejemplos concretos de los errores que con mayor frecuencia manifiestan los alumnos en cuanto a sus conocimientos de base, repertorio de heurísticos, «metaconocimentos» y habilidades «metacognitivas» y de afectividad.

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Conocimientos de base

Las dificultades más frecuentes en relación con esta dimensión son:

- El alumno traduce literalmente el enunciado y sigue el orden en que están expresadas las frases contenidas en el mismo (Pérez, 1987).
- El alumno ha comprendido el enunciado pero se equivoca a la hora de elegir las operaciones a aplicar (Tomás, 1990) porque ha seleccionado dichas operaciones a partir de un análisis superficial del enunciado (Simon, 1978, cit. en Pérez, 1994).
- El alumno no sabe cuándo aplicar los conocimientos que posee, como consecuencia de cómo los aprendió, o generaliza de manera incorrecta los procedimientos que ya domina (Enright y Choate, 1993).
- El alumno no es capaz de agrupar los problemas matemáticos en función de su estructura profunda (lo que le facilitaría la generalización de las estrategias de resolución), al carecer de los esquemas cognitivos adecuados. En su lugar, agrupa los problemas en función de su estructura superficial (contenido, tipo de pregunta, etc.) (Garofalo y Lester, 1985).
- El alumno no utiliza los conocimientos que posee a la hora de interpretar las respuestas que da a las situaciones problemáticas, por ejemplo, cuando obtiene que la altura de un trampolín es de 1.325 metros y no se da cuenta de que debe haber cometido un error (Macnab y Cummine, 1992).
- El alumno domina unos determinados recursos matemáticos pero sólo los emplea en problemas que los demandan explícitamente. Realmente no es capaz de apreciar la utilidad de dichos recursos ni sabe aplicarlos fuera del marco escolar (Schoenfeld, 1992).
- El alumno tiene dificultades para comprender los enunciados de los problemas matemáticos debido a un deficiente conocimiento lingüístico y semántico (Mayer, 1991) o una deficiente comprensión lectora de dichos textos, que difieren de los de humanidades en cuanto a su estructura y exigencias de comprensión (Callejo, 1987). Según Macnab y Cummine (1992), las dificultades que puede presentar la lectura de los enunciados matemáticos incluyen:«1. Dificultades debidas a la complejidad sintáctica del castellano utilizado, 2. Dificultades debidas a la utilización de vocabulario técnico, 3. Dificultades causadas por la utilización de notación matemática y, 4. Dificultades debidas a la incapacidad de relacionar las matemáticas con el contexto» (Macnab y Cummine, 1992, p.119).

Revista de Educación, 342. Enero-abril 2007, pp. 257-286
Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

- El alumno tiene dificultades relativas a su conocimiento del procedimiento, es decir, conocimiento de cómo ejecutar una secuencia de operaciones (Mayer, 1991), tales como dividir números decimales, o como multiplicar un entero y un decimal. En ocasiones se producen interferencias entre los procedimientos adquiridos previamente y los nuevos procedimientos que se aprenden, por ejemplo, cuando al alumno que sabía sumar decimales se le enseña a multiplicarlos, tras el nuevo aprendizaje separa en la suma total tantos decimales como tienen los sumandos (Callejo, 1987).

Heurísticos

Las dificultades que aparecen en relación con el repertorio de heurísticos se deben sobre todo a las prácticas educativas (Schoenfeld, 1992). Los heurísticos no se suelen enseñar explícitamente a los alumnos, sino que éstos se limitan a observar los que aparecen en sus libros o los que usan sus profesores, sin que en ninguno de los dos casos se haga una referencia clara a su utilidad y aplicabilidad.

El entrenamiento exclusivo en heurísticos no siempre ha repercutido positivamente en la RPM (Wilson, 1967 y Smith, 1973, cits. en Schoenfeld, 1992). Esto se ha debido fundamentalmente a que los heurísticos no se generalizan por sí solos. Ésta constituye la principal dificultad que presentan los alumnos en relación con esta variable: no suelen aplicarlos de manera flexible en función de las demandas concretas de la situación y tienen dificultad para aplicar los heurísticos que se enseñan en un determinado contexto a las nuevas situaciones (Enright y Choate, 1993).

Procesos «metacognitivos»

Las dificultades relacionadas con los procesos «metacognitivos» se ponen de manifiesto cuando (Schoenfeld, 1992):

- El alumno no percibe cuáles de los recursos algorítmicos y heurísticos de que dispone son los apropiados para afrontar un determinado problema o ni siquiera es consciente de la posibilidad de usar tales recursos.
- El alumno se muestra inflexible a la hora de abandonar un determinado punto de vista que no le está llevando a la solución de un problema y no busca alternativas. O una vez que ha encontrado una vía de solución, no examina otras posibilidades.
- El alumno no pone en juego destrezas de estimación que le permitan comprobar las soluciones a las que llega y, así, poder cambiar sus estrategias en caso de

que las soluciones obtenidas por medio de la estimación y por medio del cálculo no coincidan.

- El alumno lee el enunciado de un problema rápidamente y, enseguida, se dispone a hallar la solución, sin una reflexión previa sobre cuál es la demanda del problema, poniendo en práctica algún automatismo adquirido previamente, sin prestar atención a su adecuación al caso concreto.
- El alumno sabe realizar una operación o problema pero no sabe explicar el procedimiento empleado o, cuando se equivoca, necesita ayuda para comprender porqué su respuesta es errónea (Cardelle-Elawar, 1992).

También el desarrollo de los procesos «metacognitivos» en relación con la RPM está muy relacionado con las prácticas educativas que se llevan a cabo en las aulas (Mayer, 1991). Así, en las escuelas los alumnos rara vez tienen ocasión de observar cómo otros se autorregulan al enfrentarse con situaciones desconocidas o más difíciles; los ejemplos que aparecen en los libros de textos no suelen dar pistas sobre cómo se ha desarrollado un determinado razonamiento y las explicaciones que dan los profesores de los problemas tampoco comunican a sus alumnos la reflexión «metacognitiva» que subyace al proceso de resolución. Por otro lado, la retroalimentación que suele darse a los alumnos cuando éstos se equivocan suele adoptar la forma de sanciones externas que no favorecen que el alumno se autoevalúe y se dé cuenta de en qué momento de todo el proceso ha podido tomar una decisión inadecuada (Garofalo y Lester, 1985).

Componentes afectivos

Schoenfeld (1985, 1992) y Lester (1983, cit. en Mayer, 1991) han identificado una serie de creencias incompatibles con el aprendizaje matemático, algunas de ellas son:

- Las Matemáticas son operaciones y como tales sólo exigen seguir reglas y memorizar.
- Los problemas matemáticos deben ser resueltos rápidamente y en pocos pasos.
- Sólo los genios pueden crear Matemáticas.
- En los problemas, el tamaño de los números es un criterio, a tener en cuenta para evaluar la dificultad del problema, más importante que su significado.
- El papel del alumno en Matemáticas consiste en recibir conocimientos y el papel del profesor consiste en transmitirlo. Los alumnos demuestran esos

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

conocimientos a través del número de problemas que son capaces de resolver correctamente.

- Los problemas matemáticos se resuelven aplicando una o más operaciones. Las palabras «claves» del problema determinan las operaciones que hay que aplicar.
- Las Matemáticas formales tienen poco o nada que ver con la resolución de problemas prácticos.
- Las Matemáticas no tienen utilidad en la vida cotidiana.
- El ser bueno resolviendo problemas matemáticos es una cuestión de habilidad, de inteligencia, si careces de esa habilidad o de esa inteligencia no importa cuánto te esfuerces porque no llegarás a resolver problemas matemáticos.

Todas estas creencias influyen tanto en las actitudes como en el rendimiento matemático (Cockroft, 1985; Garofalo, 1989) e incluso en aspectos tan puntuales de éste como la elección de las estrategias de resolución que se aplican (Mayer, 1991).

Las creencias y actitudes tienen su origen tanto en el contexto escolar como en el medio sociocultural más amplio que, a través de distintas fuentes de información (medios de comunicación, familiares, amigos, etc.), puede transmitir una imagen de las Matemáticas como asignatura difícil, complicada y sin apenas utilidad (Macnab y Cummine, 1992). Como consecuencia de ello, las Matemáticas suelen asociarse con emociones de aversión, tal y como se recoge en el informe Cokcroft (1985).

Intervención psicoeducativa sobre las dificultades en la resolución de problemas matemáticos

La intervención se centrará en los tres grandes bloques de factores que intervienen en la aparición de las dificultades en la RPM (tarea, alumno y contexto).

En relación con la tarea

Muchas de las dificultades que genera el lenguaje en el que está expresado el problema pueden salvarse si el enunciado va acompañado de gráficos y dibujos en los que se destaquen los datos relevantes (Enright y Choate, 1993).

En otras ocasiones, según la gravedad de las dificultades lectoras del alumno, puede merecer la pena presentar los problemas «sin palabras», es decir, mediante dibujos u objetos de manipulación (Enright y Choate, 1993).

En relación con los tipos de problemas que se plantean al alumno, la decisión vendrá determinada por el objetivo de instrucción que se persiga. Si pretendemos mejorar el proceso de resolución del alumno tendremos que evitar los ejercicios rutinarios de mera aplicación y, en su lugar, proponer tareas (Schoenfeld, 1989):

- desafiantes para el alumno: a veces esto se consigue con un simple cambio en la formulación del problema, por ejemplo, en lugar de «Comprueba que...», proponer «Un amigo mío afirma que... ¿es verdad?»;
- que requieran la aplicación de nuevos procedimientos de solución que surjan de la combinación de aquéllos que ya domina el alumno;
- que se acerquen a los intereses de los alumnos.

En relación con el alumno que resuelve el problema

Entre los factores implicados en la RPM que hacen referencia al alumno se han examinado las cuatro dimensiones clásicas (conocimientos de base, repertorio de heurísticos, «metaconocimentos» y habilidades «metacognitivas» y afectividad), a la hora de intervenir tendremos que tener en cuenta las dificultades que hayan podido aparecer en cada una de ellas.

Conocimientos de base

Luria y Tsvetkova (1981) proponen una serie de indicaciones para que los individuos con determinadas lesiones cerebrales puedan superar las dificultades relativas a la comprensión del enunciado del problema. Algunas de estas indicaciones pueden ser válidas para la intervención «psicoeducativa» sobre los alumnos con dificultades en la RPM:

- Buscar y subrayar las palabras importantes de cada frase del enunciado.
- Escribir de modo esquemático el contenido de cada frase del enunciado.
- Expresar cada frase con sus propias palabras.
- Reproducir el texto utilizando frases cortas y sencillas.

Revista de Educación, 342. Enero-abril 2007, pp. 257-286
Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Otras técnicas dirigidas a mejorar la comprensión del enunciado por parte del alumno consisten en que éste: se vea obligado a explicar el enunciado a un compañero, señale cuál es la pregunta del problema y la explique con sus palabras, indique los datos que hacen falta para resolver el problema y separe los datos relevantes de los que no lo son (Enright y Choate, 1993).

Para abordar las dificultades que supone al alumno la distinción entre los datos relevantes e irrelevantes del problema puede ser útil el entrenamiento en la realización de diagramas, gráficos o dibujos a partir del enunciado del problema, de tal manera que se facilite la representación mental del mismo (Mayer, 1991).

Para evitar las respuestas absurdas (Ejemplo: la longitud de un lápiz es de 1.546 metros) puede ser eficaz obligar al alumno a relacionar la solución alcanzada con el enunciado, para ello debe exigírsele que ponga al lado de cada resultado numérico obtenido el nombre expresivo de su significado (Alonso, 1986).

Repertorio de heurísticos

Existen estudios (Algarabel et al., 1996) que indican que el entrenamiento en heurísticos específicos constituye un método útil para mejorar el rendimiento en la RPM. Nickerson, Perkins y Smith (1990), a partir del modelo de RPM de Polya, proponen un listado de heurísticos adecuados para cada una de las fases del modelo.

Heurísticos para representar o comprender el problema:

- Asegúrate de que conoces la incógnita, los datos y las relaciones entre los datos.
- Asegúrate de que comprendes la índole del estado final, del estado inicial y de las operaciones posibles para llegar del estado inicial al estado final.
- Traza un gráfico o diagrama e introduce la notación adecuada.
- Si la representación de un problema no conduce a la solución, trata de volver a formular el problema.

Heurísticos para idear un plan:

- Recuerda un problema conocido de estructura análoga al que tienes delante y trata de resolverlo.
- Piensa en un problema conocido que tenga el mismo tipo de incógnita y que sea más sencillo.

- Si no puedes resolver este problema, intenta transformarlo en otro cuya solución conozcas.
- Simplifica el problema fijándote en casos especiales.
- Sustituye la variable entera por valores específicos y observa si aparece alguna generalización; si así ocurre, trata de comprobar esa generalización mediante inducción matemática. También puedes sustituir las incógnitas por los valores extremos (por ejemplo, cero o infinito) y observa si aparece alguna solución.
- Convierte el problema en otro más general y prueba a resolverlo.
- Descompón sucesivamente el problema en partes cada vez más pequeñas hasta conseguir problemas de tamaño manejable.

Heurísticos para ejecutar el plan:

- Verifica cada paso.

Heurísticos para verificar los resultados:

- Trata de resolver el problema de un modo diferente.
- Verifica las implicaciones de la solución.

Todos estos heurísticos han de ser modelados por el profesor (o por un alumno aventajado) mientras resuelve un problema, haciendo explícita la conexión entre el heurístico y su aplicación. Posteriormente, el alumno con dificultades en la RPM debe ponerlos en práctica con la ayuda del profesor. Finalmente, el alumno debe practicar en solitario (Nickerson, Perkins y Smith, 1990).

Schoenfeld (1980, cit. en Nickerson, Perkins y Smith, 1990) ha diseñado una estrategia directiva general para la enseñanza de una serie de heurísticos de RPM. La estrategia directiva consta de cinco fases:

Análisis. El objetivo consiste en comprender el problema y en simplificarlo. Para ello se trabajan los siguientes heurísticos:

- Dibuja un diagrama del enunciado.
- Examina casos especiales: aplicando valores especiales para ejemplificar el problema; examinando los casos extremos; igualando todos los parámetros enteros a 1, 2, 3, […] en una sucesión hasta hallar un patrón.
- Simplifica el problema.

Diseño. El objetivo consiste en desarrollar un plan de resolución, mantener dicho plan y asegurarse de que los cálculos no se realizan prematuramente. No se sugiere ningún heurístico.

Exploración. Esta fase tiene lugar cuando aparecen dificultades y no existe un plan que pueda llevar directamente a la solución. Esta fase implica los siguientes heurísticos:

- Considera problemas equivalentes. Para ello reemplaza las condiciones por otras equivalentes o recombina los elementos del problema de distinta manera o introduce elementos auxiliares o vuelve a formular el problema (cambiando de perspectiva o de notación, considerando argumentos por contradicción, suponiendo una solución y aceptando sus propiedades).
- Considera problemas algo modificados: Para ello elige «subobjetivos» o retira una condición y luego trata de insertarla de nuevo o, descompón el problema y trabaja sobre cada una de las partes.
- Considera problemas ampliamente modificados. Para ello construye un problema análogo con menos variables, o mantén fijas todas las variables menos una para determinar su impacto, o intenta aprovechar cualquier problema parecido en cuanto a su forma, datos y conclusiones.

Realización. En condiciones normales, la realización sigue a la fase de diseño y se basa en la puesta en marcha del plan diseñado. No se sugieren heurísticos para esta fase.

Verificación. El objetivo consiste en evaluar la solución obtenida. Para ello se recurre a los siguientes heurísticos:

- Somete la solución a estas pruebas específicas: ¿utiliza todos los datos pertinentes?, ¿cuadra con las estimaciones y predicciones razonables?, etc.
- Somete la solución a estas pruebas generales: ¿puede obtenerse de un modo diferente?, ¿puede comprobarse a través de casos especiales?, ¿puede reducirse a resultados conocidos?, etc.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de estos heurísticos transcurre así (Schoenfeld, 1980, cit. en Nickerson, Perkins y Smith, 1990):

- El profesor modela el uso de heurísticos aplicándolos a un problema matemático concreto.

- El profesor discute ampliamente con los alumnos la puesta en práctica de los heurísticos.
- Los alumnos, divididos en grupos, tienen oportunidad de aplicar los heurísticos bajo la mirada atenta del profesor que, en caso necesario, les proporciona la retroalimentación adecuada. Para estimular la reflexión sobre el proceso de RPM, el profesor suele plantear al alumno preguntas como por ejemplo: ¿qué estás haciendo?, ¿por qué estás haciendo esto?, ¿cómo te ayuda lo que estás haciendo para alcanzar la solución?.
- Con la práctica los alumnos van interiorizando estas preguntas hasta llegar a plantearlas de manera espontánea.

El principal problema del entrenamiento específico en heurísticos estriba en que la generalización de los logros alcanzados no es del todo satisfactoria, es decir, los alumnos tienen problemas para aplicar los heurísticos aprendidos a nuevos problemas. Por esta razón, Polya (1945) recomienda enseñar estos heurísticos aplicándolos a una diversidad de problemas, con objeto de generalizar su uso.

«Metaconocimientos» y habilidades «metacognitivas»

Una vía de mejorar las habilidades de autorregulación del alumno en relación con la RPM se basa en el entrenamiento en «autocorrecciones». En concreto, para favorecer el aprendizaje autónomo del alumno podemos mostrarle, mediante un modelo realizado por el profesor, cómo se realizan las «autocorrecciones» (Macnab y Cummine, 1992).

La enseñanza de las estimaciones constituye otra vía de mejorar los procesos de autocontrol del alumno (Enright y Choate, 1993). En este caso se trata de enseñarle a realizar estimaciones de los problemas que resuelve para compararlos con los resultados que obtiene y, de esta forma, modificar o no el proceso de resolución seguido.

El entrenamiento en hacerse preguntas a sí mismo se ha mostrado como otra técnica eficaz para el mismo objetivo. Las «autopreguntas» funcionan a modo de estrategias «metacognitivas» que ayudan a que los alumnos se centren en el proceso de resolución del problema. Estas «autopreguntas» se pueden utilizar en el trabajo por parejas de los alumnos (King, 1991) o en el trabajo individual (Manning, 1984). La instrucción se basa en enseñar a los alumnos cómo usar las «autopreguntas» adecuadas a cada una de las fases de la resolución del problema, por ejemplo (King, 1991):

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

- En la planificación: ¿cuál es el problema?, ¿qué estamos tratando de hacer aquí?, ¿qué información nos da?, etc.
- En la ejecución: ¿estamos utilizando el plan o la estrategia?, ¿necesitamos un nuevo plan?, etc.
- En la verificación: ¿qué fue lo que funcionó?, ¿qué podríamos hacer de manera distinta la próxima vez?

El proceso de instrucción suele desarrollarse de la siguiente manera: primero se modela el uso de las «autopreguntas» a los alumnos; algunos de ellos practican ante los demás y se les devuelve retroalimentación sobre cómo lo han hecho y, finalmente, los alumnos aplican las «autopreguntas» mientras resuelven un problema.

Componentes afectivos

Muchas de las dificultades que se plantean en relación con esta dimensión quedarían subsanadas con las intervenciones anteriores y con las que se expondrán para el contexto. Por ello, sólo vamos a destacar algunas estrategias generales para favorecer la motivación y las actitudes del alumno hacia la RPM.

En *primer lugar,* los problemas que se plantean al alumno deben contagiarse de algunas de las características propias de los problemas que hay que resolver en la vida cotidiana. Esto se traduce en (Barberá y Gómez-Granell, 1996):

- Que el alumno tenga la oportunidad de definir una situación como problemática.
- Que el problema sea práctico.
- Que el problema admita más de una solución.
- Que el problema admita más de un método para alcanzar la solución.

En *segundo lugar,* a través de las actuaciones y de las palabras se debe transmitir al alumno nuestra confianza en su capacidad para resolver problemas (Garofalo, 1989).

En *tercer lugar,* se debe comunicar a los alumnos la dificultad de la tarea que hay que realizar y el grado de esfuerzo que exige, porque el alumno tiende a experimentar una gran satisfacción cuando es capaz de resolver un problema desafiante y, en caso de fracaso, ante una tarea difícil que demanda una gran cantidad de esfuerzo, el alumno podrá reconocer que el error no es resultado de su falta de competencia (Kloosterman y Gorman, 1990). Esta última atribución le animará a volverlo a intentar.

En *cuarto lugar,* se debe fomentar la resolución de problemas en pequeños grupos porque el compartir las dificultades con el grupo de iguales puede contribuir a que éstas se vivencien con menos carga de angustia (Martí, 1996).

En *quinto lugar,* se debe valorar el conocimiento informal del alumno y el uso que hace de procedimientos y estrategias personales para adaptar la instrucción a esos conocimientos previos (Gómez-Granell, 1994).

Finalmente, se deben emplear recursos didácticos variados en la RPM. Entre ellos, el ordenador supone un valioso instrumento para atraer la atención y el interés del alumno por la RPM (Enright y Choate, 1993).

En relación con el contexto en que el alumno aprende y resuelve los problemas matemáticos

No se deberían utilizar los problemas de los libros de texto sin un análisis previo del grado de dificultad que suponen (Tomás, 1993). Por otro lado, hay que alternar las diversas formas de plantear un problema para que los alumnos no se acostumbren a una sola manera de identificar los datos que se les suministran y los datos que se les piden (por ejemplo: situación y pregunta final) (Tomás, 1993).

Hay que cuidar los criterios de evaluación de la RPM del alumno, de manera que no se refuerce exclusivamente la obtención de una respuesta correcta, sino que se valoren otros aspectos de la resolución, como la identificación y la justificación de los métodos de solución empleados. Las valoraciones negativas de los resultados deben sustituirse por la propia corrección del alumno (Rivière, 1990).

Los alumnos tienen que tener la oportunidad de verbalizar su propio pensamiento, explicar o justificar sus soluciones y pedir la aclaración de aquello que no entienden (Schoenfeld, 1992).

Finalmente, es conveniente trabajar la RPM en pequeños grupos donde el alumno se vea obligado a hacer explícito y a justificar su proceso de resolución (Martí, 1996). Estos trabajos pueden favorecer el intercambio de ideas en torno a la RPM y que el alumno tome conciencia de que un mismo problema puede abordarse a través de distintos procedimientos, todos ellos válidos.

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Conclusiones

De lo expuesto en este artículo se extrae que la RPM es una actividad compleja que se desarrolla en una serie de fases: (a) Identificación y definición del problema, (b). Planificación de la solución, (c) Ejecución del plan y (d) Verificación.

En cada una de las fases los alumnos pueden manifestar dificultades. De este modo, en la *fase de definición* del problema los alumnos pueden encontrar dificultad a la hora de traducir el enunciado en una representación mental que les oriente en la búsqueda de la solución, debido a problemas en sus conocimientos de base, el desconocimiento de heurísticos o debido a la dificultad que entraña el propio enunciado. Para superar estas dificultades en el artículo se han propuesto intervenciones que van dirigidas a lograr que el alumno desarrolle una correcta representación mental del enunciado matemático y que pasan por la redacción clara del problema, el entrenamiento en procedimientos de representación gráfica del enunciado y el desarrollo de las habilidades de análisis y búsqueda de información.

En la *fase de planificación y ejecución* del plan, las dificultades más frecuentes suelen deberse a un bajo desarrollo «metacognitivo» que se traduce en respuestas impulsivas en las que no se tiene en cuenta la reflexión sobre la demanda de la tarea antes de empezar la ejecución del problema, pero también son frecuentes problemas en la aplicación de heurísticos y dificultades relativas al conocimiento del procedimiento. Como vías de solución de todas estas dificultades se proponen programas de entrenamiento en heurísticos basados en el modelado y el pensamiento en voz alta, donde la responsabilidad sobre el control de la tarea va cediendo progresivamente del profesor al alumnado, pasando por una fase intermedia de resolución conjunta del problema matemático.

Por último, en la *fase de verificación* las dificultades más comunes son las que se dan con respecto a la evaluación del proceso seguido, motivadas por una deficiente «metacognición» y/o por un escaso conocimiento de base que ayude a interpretar los resultados. El entrenamiento en «autocorrecciones» y «autopreguntas» y la enseñanza explícita de las estimaciones se muestran como buenos procedimientos para resolver las dificultades que aparecen en esta fase de la RPM.

Todas estas actuaciones deben ir acompañadas además de intervenciones dirigidas a mejorar el contexto en el que el alumno resuelve los problemas matemáticos y que pasan por crear un clima en el que el alumno sienta que se valora su proceso de resolución y no sólo la solución a la que llega, pueda compartir su pensamiento matemático con sus iguales, esté expuesto a problemas matemáticos interesantes y útiles y se empleen recursos didácticos variados para plantear y resolver los problemas.

Referencias bibliográficas

Algarabel, S.; Dasí, C.; Gotor, A.; Perea, M. (1996): « Solución de problemas: Una revisión de la importancia del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en matemáticas», en *Revista Española de Pedagogía,* 203, (1996), pp. 143-165.

Alonso García, V. (1986): « Estrategias operativas en la resolución de los problemas matemáticos en los niños del ciclo medio de la E.G.B.», en *Aula Abierta,* 47(12), (1986), pp. 165-196.

Alonso Tapia, J. (1991): *Motivación y aprendizaje en el aula.* Madrid,: Aula XXI/ Santillana., 1991.

Barberá, E.; Gómez-Granell, C. (1996): «Las estrategias de enseñanza y evaluación de las matemáticas», en C. Monereo e I. Solé (coords.): *El asesoramiento psicopedagógico: una perspectiva profesional y constructivista.* Madrid, Alianza Psicología, pp. 383-404.

Callejo, M. L. (1987): *La enseñanza de las matemáticas.* Madrid, Narcea.

Cardelle-Elawar, M. (1992): « Effects of teaching metacognitive skills to student with low mathematics ability», en *Teaching & Teacher Education,* 8 (2),(1992), pp. 109-121.

Cawley, J. F.; and Miller, J. H. (1986): «Selected views on metacognition, arithmetic problem solving, and learning disabilities», en *Learning Disabilities Focus,* 2 (1), pp. 36-48.

Cockroft, W. H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan.* Madrid,: MEC.

De Corte, E. (1993): «La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación», en. En J. A. Beltrán, V. Bermejo; M. D. Prieto; D. Vence (eds.): (1993) *Intervención psicopedagógica.* Madrid, Pirámide, pp. 145-168. Madrid, Pirámide.

Edwards, D.; Mercer, N. (1987): *Common knowledge: The development of understanding in the classroom.* Londonres, Methuen.

—Edwards, D.; Mercer, N. (1989): «Reconstructing context: the conventionalization of classroom knowledge», en *Discourse Processes,* 12, (1989), pp. 91-104.

Enright, B. E.; Choate, J. S. (1993): «Mathematical Problem Solving: The Goal of Mathematics», en J. S. Choate (ed.): *Successful Mainstreaming. Proven ways to detect and correct special needs,* pp. 280-303. Needham Heights, Massachusetts, Allyn and Bacon, pp. 280-303.

Ernest, P. (1989): «The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model», en *Journal of Education Teaching,* Vol.15, (nº1), pp. 13-32.

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Garofalo, J. (1989): « Beliefs, responses and mathematics education: Observations from the back of the classroom», en *School Science and Mathematics,* 89 (6), pp. 451-455.

Garofalo, J.; Lester, F. K. (1985): «Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance», en *Journal for Research in Mathematics Education,* 16(3) pp. 163-176.

Gómez, C. (1991): «Cognición, contexto y enseñanza de las matemáticas», en *Comunicación, Lenguaje y Educación,* 11-12, pp. 11-26.

Gómez-Granell, C. (1994): « Las matemáticas en primera persona», en *Cuadernos de Pedagogía,* 166, pp. 65-66.

Gómez-Granell, C.; y Fraile, J. (1993): «Psicología y didáctica de las matemáticas», en *Infancia y aprendizaje,* 62-63, pp. 101-113.

King, A. (1991): «Effects of Training in Strategic Questioning on Children's Problem-Solving Performance», en *Journal of Educational Psychology,* 83 (3), pp. 307-317.

Kloosterman, P.; y Gorman, J. (1990): « Building motivation in the elementary mathematics classroom», en *School Science and Mathematics,* 90(5), pp. 375-382.

Lester, F. K.,; Garofalo, J. y Kroll, D. L. (1989): «Self-Confidence, Interest, Beliefs, and Metacognition: Key Influences on Problem Solving Behavior», en D. B. McLeod; & V. M. Adams (eds.): *. Affect and mathematical problem solving: A new perspective,* pp. 75-88. New YorkCork, Springer-Verlag, pp. 75-88.

Luria, A. R.; y Tsvetkova, L. S. (1981): *La resolución de problemas y sus trastornos.* Barcelona: Fontanella.

Macnab, D. S.; Cummine, J. A. (1992): *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16: Un enfoque centrado en la dificultad.* Madrid, Visor.

Manning, B. (1984): «A self communication structure for learning mathematics», en *School Science and Mathematics,* 84 (1), pp. 43-51.

Martí, E. (1996): «Psicopedagogía de las matemáticas», en. En J. Escoriza,; R. González;, A. Barca; J. A. González (eds.):, *Psicología de la Instrucción. Vol. 5. Psicopedagogías específicas: Áreas curriculares y procesos de intervención,* pp. 1-29. . Barcelona,: EUB, pp. 1-29.

Mayer, R. E. (1991): *Thinking, problem solving, cognition.* New York,: Freeman.

McLeod, D. B. (1992): «Research on affect in mathematics education: a reconceptualization», en. En D. Grouws (ed.):, *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 575-596). New York,: Macmillan, pp. 575-596.

Mevarech, Z. R. (1995): «Metacognition, General Ability, and Mathematical Understanding», en *Early Education and Development,* 6(2), (1995), pp. 155-168.

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005

Mialaret, G. (1984): *Las matemáticas: cómo se aprenden cómo se enseñan.* Madrid, Aprendizaje Visor.

Montague, M. (1988): «Strategy instruction and mathematical problem solving», en *Reading, Writing and Learning Disabilities,* 4 (1988), pp. 275-290.

— (1992): «The Effects of Cognitive and Metacognitive Strategy Instruction on the Mathematical Problem Solving of Middle School Students with Learning Disabilities», en *Journal of Learning Disabilities,* 25 (4), pp. 230-248.

Nickerson, R. S.; Perkins, D. N.; y Smith, E. E. (1990): *Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual.* Madrid: Paidós/M.E.C., 1990 (2ª edición).

Nortes, A. (1987): « Resolución de problemas», en *Bordón,* 44 (2), pp. 213-216.

Pérez Echevarría, M. P. (1987): «Los problemas matemáticos», en *Cuadernos de Pedagogía,* 144, pp. 79-81.

— (1994): «La solución de problemas en matemáticas», en J. I. Pozo Municio (coord.):, *La solución de problemas.* pp. 53-83. Madrid, Santillana/Aula XXI, pp. 53-83.

Polya, G. (1945): *How to solve it.* Princenton, N. J., Princenton University Press.

Quiles, M. N. (1993): «Actitudes matemáticas y rendimiento escolar», en *Comunicación, Lenguaje y Educación,* 18, pp. 115-125.

Riviére, A. (1990): «Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas», en A. Marchesi; C. Coll; J. Palacios (eds.):, *Desarrollo psicológico y educación, III,* pp.155-182. Madrid,: Alianza Editorial, pp.155-182.

Schoenfeld, A. H. (1985): Mathematical problem solving. San Diego, California, Academic Press, Inc.

— (1989): «Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving», en. L. E. Resnick and L. E. Klopfre (eds.):. *Toward the thinking curriculum: current cognitive research,* pp. 83-103. Washington D.C., ASCD, pp. 83-103.

— (1992): «Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics», en. En Grouws (ed.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 334-370. New York,: Macmillan, pp. 334-370.

Tomás Folch, M. (1990): «Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica», en *Educar,* 17, pp. 119-140.

— (1993): «Consideraciones sobre las tareas de aprendizaje del alumnado: la resolución de problemas aritméticos en la etapa 6-12 años», en *Qurriculum, 6-7,* pp. 139-146.

Zorroza, J.; Sánchez-Cánovas, J. (1995): «Los componentes cognitivos de la capacidad matemática: Representación mental, esquemas, estrategias y algoritmos», en. *Psicológica,* 16, pp. 305-320.

Fecha de entrada: 14-06-2005 Fecha de aceptación: 23-12-2005